

空間 $\text{Map}(CP^m, CP^n)$ のホモトピー

東工大 理学部 逆尾靖也

$\text{map}(CP^m, CP^n)$, $0 \leq m \leq n$, を m 次元複素射影空間から n 次元複素射影空間への連続写像の集合とし, コンパクト一閉位相を与えた空間としよう。 $\text{map}(CP^m, CP^n)$ は $0 < m$ のときに無数の path-連結成分をもつが, $\text{Map}(CP^m, CP^n)$ で各写像 $: CP^m \rightarrow CP^n$ の path-連結成分をあらわそう。 他方, $U(m+1)$ を次数 $m+1$ のユニタリ群とし, Δ_{m+1} を $Z \cdot I_{m+1}$, $|Z|=1$ の形のユニタリ群の部分群とする。 ここで I_{m+1} は $U(m+1)$ の単位行列とする。

$U(m+1)$ の通常の CP^n への作用を考えれば次の写像が自然に得られる:

$$S_m : U(m+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m) \rightarrow \text{Map}(CP^m, CP^n).$$

たとえば $m=n$ ならば左辺は射影群である。 我々の目標は S_m の誘導群同型

$$S_{m*} : \pi_1(U(m+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m)) \rightarrow \pi_1(\text{Map}(CP^m, CP^n))$$

を調べることである。このとき次の定理を得る。

定理 Q を有理数体とする。

$$\begin{aligned} a) \quad \mathcal{S}_{m*} \otimes \mathbb{1} : \pi_i(U(n+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m)) \otimes \mathbb{Q} \\ \rightarrow \pi_i(\text{Map}(CP^m, CP^n)) \otimes \mathbb{Q} \end{aligned}$$

はすべての i で同型写像である。

b) \mathcal{S}_{m*} は $i < 4n - 4m + 1$ で同型写像であり、
 $i = 4n - 4m + 1$ で上への準同型写像である。

c) $\mathcal{S}_{n*} : \pi_i(U(n+1)/\Delta_{n+1}) \rightarrow \pi_i(\text{Map}(CP^n, CP^n))$
は $i < 2n + 2$ で単射準同型写像である。

$$d) \quad \pi_1(\text{Map}(CP^n, CP^n)) \cong \mathbb{Z}_{(n+1)}$$

$$\pi_2(\text{Map}(CP^n, CP^n)) \cong \mathbb{Z}_{(2)} \quad (n \geq 1)$$

ここで $\mathbb{Z}_{(k)}$ は位数 k の巡回群とする。

証明は m を固定して、 m についての帰納法で行なわれる。

$m=0$ ならば $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_0$ は homeomorphism であるから a),

b) は明らかである。

次にファイブレーション

$F_m \rightarrow \text{Map}(CP^m, CP^n) \xrightarrow{j_m} \text{Map}(CP^{m-1}, CP^n)$
 を考えよう。このと互次の可換図式は明らかであろう。

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^{2n-2m+1} = \frac{\Delta_m \times U(n-m+1)}{\Delta_{m+1} \times U(n-m)} & \xrightarrow{S'_m} & F_m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (A) \quad U(m+1)/\Delta_{m+1} \times U(n-m) & \xrightarrow{S_m} & \text{Map}(CP^m, CP^n) \\
 \downarrow & & \downarrow j_m \\
 U(m+1)/\Delta_m \times U(n-m+1) & \xrightarrow{S_{m-1}} & \text{Map}(CP^{m-1}, CP^n)
 \end{array}$$

更に F_m は

$F_m = \{ f: CP^m \rightarrow CP^n, f|_{CP^{m-1}} = \text{包含写像} \}$
 と考えらるから、 $CP^m = CP^{m-1} \cup e^{2m}$ により

$$\Omega^{2m}(CP^n) \simeq F_m \quad (\text{up to homotopy})$$

となり。

$$(*) \quad \pi_i(F_m) \simeq \pi_i(\Omega^{2m}(CP^n)) \simeq \pi_i(\Omega^{2m}S^{2n+1})$$

が得られる。更に基本的事項として次の(**)が得られる。

$$(**) \quad S'_{m \times}; \quad \pi_i(S^{2n-2m+1}) \rightarrow \pi_i(F_m) \quad \text{は } i = 2n-2m+1 \text{ で同型写像である。}$$

(**) を認めれば次のように (2) 昇階法が完成する。

$\pi_i(F_m)$ は $i = 2n-2m+1$ を除いて torsion 部から $S'_{m \times} \otimes 1$ は同型写像となり、図式 (A) の five lemma から a) が

得られる。 $S'_m : S^{2m-2m+1} \rightarrow F_m$ は

$\cong \mathbb{R}^1 : S^{2m-2m+1} \rightarrow \mathbb{Q}^{2m} S^{2m+1}$ と考之れば懸垂同型定理により,

$$S'_{m*} : \pi_i(S^{2m-2m+1}) \rightarrow \pi_i(\mathbb{Q}^{2m} S^{2m+1})$$

は $i < 4n - 4m + 1$ で同型, $i = 4n - 4m + 1$ で全射になることがわかる。つまり

$$S'_{m*} : \pi_i(S^{2m-2m+1}) \rightarrow \pi_i(F_m)$$

は $i < 4n - 4m + 1$ で同型, $i = 4n - 4m + 1$ で全射であるから, 再び five lemma (b) が得られる。 a) $i = m = n + 2$,

$$\begin{aligned} \pi_i(U(m+1)/\Delta_{n+1}) &= 0 & i = \text{偶数}, 1 < i < 2m+2 \\ &= \mathbb{Z} & i = \text{奇数}, 1 < i < 2m+2 \end{aligned}$$

を考之れば (c) が得られる。 d) のについてはホモトピー群の完全系列を使って計算すればよい。

結局, 我々が求めている, $(*)$ を示せばよいことになる。すなわち, $\cong \mathbb{R}^1$ の字像

$$S, \# : S^{2m-2m+1} \times \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

を次のように定める。

$$\underline{Z} = (z_0, \dots, z_{n-m}) \in S^{2n-2m+1}$$

$$\underline{W} = [w_0, \dots, w_m] \in \mathbb{C}P^m$$

として,

$$S(\underline{z}, \underline{w}) = [w_0, w_1, \dots, w_{m-1}, w_m z_0, \dots, w_m z_{n-m}]$$

$$I(\underline{z}, \underline{w}) = [w_0, w_1, \dots, w_m, 0, \dots, 0]$$

S と t は $S^{2n-2m+1} \times CP^{m-1} \cup S_0 \times CP^m$ の上で一致するから、差 $d(t, S) \in \pi_{2n+1}(CP^n)$ を定める。
定義から $d(t, S)$ が生成元になることを示せばよいことがわかる。このためには次のリフトが可能であることを示す。

$$(B) \quad \begin{array}{ccc} & & S^{2n+1} \\ & \nearrow \text{deg } 1 & \downarrow \\ S^{2n+1} & \xrightarrow{d(t, S)} & CP^n \end{array}$$

さて, $\bar{w} = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in S^{2m-1}$

$$\bar{z} = (z_0, \dots, z_{n-m}) \in S^{2n-2m+1}$$

$$\text{とすれば } S^{2n+1} = S^{2m-1} * S^{2n-2m+1}$$

$$= \{ (\cos \theta) \bar{z}, (\sin \theta) \bar{w} \}$$

$$\text{として, } S^{2n-2m+1} \times E^{2m} = \{ (\cos \theta) \bar{z}, (\sin \theta) \bar{w} \},$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/4 \} \text{ が } S^{2n+1} \text{ の埋め込みをなすとして}$$

$\tau \circ \nu_0$

$$\alpha; (E^{2m}, S^{2m-1}) \rightarrow (CP^m, CP^{m-1})$$

$$\in \alpha(\sin \theta \cdot \bar{w}) = (\sin 2\theta \cdot \bar{w}, \cos 2\theta), 0 \leq \theta \leq \pi/4,$$

τ を用いて

$$d(t, S) = d(t \circ 1 \times \alpha, S \circ 1 \times \alpha)$$

が得られる。

二つを用いて2つの写像

$$\tau, \sigma : S^{2n+1} \rightarrow CP^n$$

を次のように定める。

$$\tau(\cos\theta \cdot \bar{z}, \sin\theta \cdot \bar{w}) = [\sin 2\theta \cdot \bar{w}, \cos 2\theta (1, 0, \dots, 0)]$$

$$\sigma(\cos\theta \cdot \bar{z}, \sin\theta \cdot \bar{w}) = [\sin 2\theta \cdot \bar{w}, \cos 2\theta \cdot \bar{z}]$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi/4)$$

$$\tau(\cos\theta \cdot \bar{z}, \sin\theta \cdot \bar{w}) = \sigma(\cos\theta \cdot \bar{z}, \sin\theta \cdot \bar{w})$$

$$= [\bar{w}, 0] \quad (\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2)$$

このとき次の性質が証明される。

$$(1) d(\tau, \sigma) = \tau - \sigma$$

$$(2) \tau = 0,$$

$$(3) d(t \circ \alpha \times \alpha, s \circ \alpha \times \alpha) = d(\tau, \sigma)$$

したがって結局

$$d(\sigma, \tau) = \sigma = d(t, s)$$

が得られる。

$$\text{よって } \tau^n : S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1} \text{ へ}$$

$$\sigma^n(\cos\theta \cdot \bar{z}, \sin\theta \cdot \bar{w}) = (\sin\theta \cdot \bar{w}, \cos\theta \cdot \bar{z})$$

$$\text{に対して } \theta = 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi/4)$$

$$= \pi/2 \quad (\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2)$$

定めれば τ^n が(B)の4つ条件をすべて満たすことがわかる。