数理解析研究所講究録
272巻 1976年 98-105

バラツキ・裾の半順序と単調検定

日本アイ・ビー・エム　渋谷 政昭
統計数理所　柳本 武美

要約 $\mathbb{R}$上の連続な分布関数の属$\mathcal{F}$にばらつき（拡り）に関するやや強い半順序を導入し，分布の位置母数にはよらない，1標本片側検定問題にたいする単調検定（isotonic tests）の族を与える。この議論は，$\mathbb{R}_+$上の連続な分布関数の族$\mathcal{F}_+$における裾の長短問題の議論と完全に平行している。

単調検定の性質をさらに調べるために，$\mathbb{R}^n$におけるばらつきの半順序を3種類導入して，これらの強弱関係を調べる。またこれらの半順序に関して単調な関数について調べる。ここでの議論も，$\mathbb{R}_+^n$における裾の半順序の議論と大体平行して進めることができる。

裾の単調検定に関する結果は，信頼性理論においてこれまで得られている諸結果を統一し一般化している。また，ばらつきの半順序に関して単調な関数の議論は，Schur凸関数の一般化である。

§1. $\mathcal{F}$ におけるばらつきの半順序と単調検定

<u>定義 1.1</u>　$F, G \in \mathcal{F}$ において G が F よりもばらつきが大きい(more spread)ことを,一般逆関数を用いて;

$$G \succ F\,(\mathcal{S}) \iff G^{-1}(u) - F^{-1}(u) \text{ が } 0<u<1 \text{ の非減少関数.}$$

この定義より,X, Y を分布関数 $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ をもつ確率変数とすると,直ちに次の定理が得られる.

<u>定理 1.1</u>　$G \succ F\,(\mathcal{S})$ の必要十分条件: $Y \sim X + h(X)$ なる非減少関数 $h(\cdot)$ が存在; $X \sim Y + k(Y)$ なる非増加関数 $k(\cdot)$ が存在.

定義より,ばらつきに関する1標本片側検定問題を次のように定式化することができる: F からの確率標本 $X_1, \cdots, X_n$ が与えられるとし,

H_0: $F(x) = G(x-a)$, $G \in \mathcal{F}$ は既知, $-\infty < a < \infty$ は未知.

H_1: $G \succ F\,(\mathcal{S})$　(Less Spread Problem のとき.)

H_2: $F \succ G\,(\mathcal{S})$　(More Spread Problem のとき.)

問題が位置の変換に関して不変であるから,検定統計量として最大不変統計量を用い,さらに順序統計量に制限して $\underline{V}(\underline{X}) = (X_{(1)} - \bar{X}, \cdots, X_{(n)} - \bar{X})$ を用いることにする。$\underline{V}(\cdot)$ の値は, $\Gamma_0^n = \{\underline{x};\, x_1 \leq \cdots \leq x_n,\ \Sigma x_i = 0\} \subset \Gamma^n = \{\underline{x};\, \Sigma x_i = 0\} \subset R^n$ なる凸錐の点である。

上の検定問題にたいする不偏検定(実は単調検定)の族

が次の定理により得られる。証明は定理1.1より容易である。

<u>定理 1.2</u>　検定関数 $\phi(\underline{V}(\underline{X}))$ が条件：$\phi(\underline{a}+\underline{b}) \geq \phi(\underline{a})$, $\forall \underline{a}, \underline{b} \in T_0^n$；を満たすならば More Spread Problem にたいして不偏である。このとき $1-\phi(\underline{V}(\underline{X}))$ は Less Spread Problem にたいして不偏である。

もちろん検定関数の代りに検定統計量と言ってもよい。検定の水準は当然 G に依存するが，統計量は依存しない。

§2. $\mathcal{F}_+$ における裾の半順序と単調検定

<u>定義 2.1</u>　$F, G \in \mathcal{F}_+$ において G が F よりも裾が長い（longer tail）ことを，次のように定義，標記する；

$G \succ F\ (\mathcal{T}) \iff G^{-1}(u)/F^{-1}(u)$ が $0<u<1$ の非減少関数.

<u>定理 2.1</u>　$G \succ F\ (\mathcal{T})$ の必要十分条件：$Y \sim X \cdot h(X)$ なる非減少関数 $h(\cdot)$ が存在；$X \sim Y \cdot k(Y)$ なる非増加関数 $k(\cdot)$ が存在.

F からの確率標本 $X_1, \cdots, X_n$ が与えられたとき，

H_{+0} :　$F(x) = G(cx)$，$G \in \mathcal{F}_+$ は既知，$0<c<\infty$ は未知.

H_{+1} :　$G \succ F\ (\mathcal{T})$　（Longer Tail Problem のとき.）

H_{+2} :　$F \succ G\ (\mathcal{T})$　（Shorter Tail Problem のとき.）

統計量 $\underline{W}(\underline{X}) = (X_{(1)}/\Sigma X_i, \cdots, X_{(n)}/\Sigma X_i) \in \Delta_0^n = \{\underline{x};\ 0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n,\ \Sigma x_i = 1\} \subset \Delta^n = \{\underline{x};\ \Sigma x_i = 1\} \subset \mathbb{R}_+^n$.

定理 2.2　検定関数 $\phi(W(X))$ が条件：$\phi(\underline{a}\cdot\underline{b}/\|\underline{a}\cdot\underline{b}\|) \geq \phi(\underline{a})$，$\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in \Delta_0^n$（ただし $\underline{a}\cdot\underline{b}$ は成分ごとの積，$\|\cdot\|$ は l_1 ノルム）；を満たすならば Longer Tail Problem にたいして不偏である。このとき $1-\phi(W(X))$ は Shorter Tail Problem にたいして不偏である。

§1と§2の議論の平行性は次の定理により，より明らかとなる。確率変数の順序は，分布関数の順序と同一視する。

定理 2.3　$Y \succ X\ (\mathcal{S}) \iff e^{Y} \succ e^{X}\ (\mathcal{G})$.

§3.　R^n, Γ^n, Γ_0^n におけるばらつきの半順序

定義 3.1　Γ_0^n におけるばらつきの半順序3種類 $\underline{b} \succ \underline{a}\ (\mathcal{S}_i)$ を次のように定義する。a_i, b_i を「順序統計量」$a_{(i)}, b_{(i)}$ または $a_{(i)}-\bar{a}$, $b_{(i)}-\bar{b}$ に変えれば，Γ^n, R^n における擬順序である。$\underline{a}=(a_1,\cdots,a_n)'$.

$\mathcal{S}_3$　$b_i - a_i$ が i の非減少関数.

$\mathcal{S}_2$　$(n-i)^{-1}\sum_{i+1}^{n} b_k - b_i \geq (n-i)^{-1}\sum_{i+1}^{n} a_k - a_i$，$i=1,\cdots,n-1$.

$\mathcal{S}_1$　$\sum_{i}^{n} b_k \geq \sum_{i}^{n} a_k$，$i=2,\cdots,n$.

説明.　$\mathcal{S}_3$ は，$a_{i+1}-a_i \leq b_{i+1}-b_i$，$i=1,\cdots,n-1$ と同等である。また $\underline{b} \succ \underline{a}\ (\mathcal{S}_3) \iff \underline{b}=\underline{a}+\underline{c}$，$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \Gamma_0^n$. したがって定理 1.2 の条件は；$\phi(\cdot)$ が半順序 $\mathcal{S}_3$ に関して非減少関数；と同等である。$\mathcal{S}_2$ は，$\sum_{1}^{i-1} b_k + (n-i+1)b_i \leq \sum_{1}^{i-1} a_k + (n-i+1)a_i$，$i=1,\cdots,n-1$ と同等である。この不等式の両辺の量は次の

ようにして得られる。$d_i=(n-i+1)(a_i-a_{i-1})$ とする。a_i が順序統計量ならばこれは normalized spacing と呼ばれるもの、$\Sigma_1^i d_j=\Sigma_1^{i-1}a_k+(n-i+1)a_i$ はしたがって cumulative normalized spacings と呼ぶことができ、$\underline{b}\succ\underline{a}$ $(\mathcal{S}_2)$ は $\underline{b}$ が $\underline{a}$ より小さな cumulative normalized spacings をもつことになる。$\mathcal{S}_1$ は、$\underline{b}$ が $\underline{a}$ を優越する (majorizes) という言葉で呼ばれているが $\mathcal{S}_1$ の条件は $\Sigma_1^i b_k\leqq\Sigma_1^i a_k$ と同等であり、大小の程度でなくばらつきの程度を示している。次の Karamata の定理は有名である。$\underline{b}\succ\underline{a}\,(\mathcal{S}_1)\Leftrightarrow\underline{a}=P\underline{b}$ となる2重確率行列 P が存在する。

<u>定理 3.1</u>　$\underline{b}\succ\underline{a}\,(\mathcal{S}_i)$ の諸条件は以下の $(n-1)\times n$ 行列 L_i を用いれば $L_i(\underline{b}-\underline{a})\geqq\underline{0}$ と表わせる。これらは以下の $(n-1)\times n$ 行列 K_i を用いた $\underline{b}-\underline{a}\in K_i'\mathbb{R}_+^{n-1}$ と同等である。また Γ_0^n 上の微分可能な関数（Γ^n 上の対称な〜関数）$H(\underline{x})$ が $\mathcal{S}_i$ に関して単調非減少である：$H(\underline{b})\geqq H(\underline{a})$, $\underline{b}\succ\underline{a}\,(\mathcal{S}_i)$；ための必要十分条件は $K_i\,\mathrm{grad}\,H\geqq\underline{0}$ である。

$$L_3=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1\end{bmatrix},\quad K_3=\begin{bmatrix}-(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -(n-2) & -(n-2) & 2 & \cdots & 2\\ -(n-3) & -(n-3) & -(n-3) & \cdots & 3\\ & \cdots & & & \cdots\\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1\end{bmatrix}$$

$$L_2=\begin{bmatrix}-(n-1) & 1 & 1 & \cdots & 1\ 1\\ 0 & -(n-2) & 1 & \cdots & 1\ 1\\ & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\ 1\end{bmatrix},\qquad K_2=L_2$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & \cdots & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad K_1 = L_3 .$$

<u>定理 3.2</u>　$\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_3)$ $\Rightarrow$ $\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_2)$ $\Rightarrow$ $\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_1)$ である。逆に関数 $H(\underline{x})$ が、$\mathcal{T}_1$ に関して単調非減少 $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_2$ に関し〃 $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_3$ に関し〃。したがって検定関数 $\Phi(\underline{V}(\underline{X}))$ が、$\mathcal{T}_1$ または $\mathcal{T}_2$ に関して単調非減少であれば More Spread Problem にたいして不偏であり、$1-\Phi(\underline{V}(\underline{X}))$ が Less Spread Problem にたいして不偏である。

定理の条件を満たす検定の棄却域はどのような構造になっているであろうか。$A=\{\underline{x};\ \Phi(\underline{x})=1\}$ は、$\underline{a}\in A$ ならば $\forall \underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_i)$ にたいして $\underline{b}\in A$。逆に $B=\{\underline{x};\ \Phi(\underline{x})=0\}$ は、$\underline{b}\in B$ ならば $\underline{b}\succ \forall\underline{a}$ $(\mathcal{T}_i)$ にたいして $\underline{a}\in B$、となる。このような集合 A, B はそれぞれ $\mathcal{T}_i$ に関する遠心集合（centrifugal set）、求心集合（centripetal set）と呼ぶことができる。T^n における $\mathcal{T}_1$ 求心集合は対称凸集合となる（対称とは座標の並べ換えに関して不変）ことが証明できる。

§4. $\mathbb{R}_+^n$, Δ^n, Δ_0^n における諸の半順序

<u>定義 4.1</u>　Δ_0^n における諸の半順序を3種類、$\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_i)$ と記し、次のように定義する。a_i, b_i を昇順に並べた成分 $a_{(i)}$, $b_{(i)}$ に変えれば Δ^n における；さらに $a_{(i)}/\Sigma a_i$, $b_{(i)}/\Sigma b_i$ に変えれば $\mathbb{R}_+^n$ における諸の擬半順序の定義となる。

$\mathcal{T}_3$　b_i/a_i が i の非減少関数.

$\mathcal{T}_2$　$\mathcal{S}_2$ と同じ.

$\mathcal{T}_1$　$\mathcal{S}_1$ と同じ.

[$\underline{a}, \underline{b} \in \Delta^n, \Delta^n_0$ であれば $\underline{b}-\underline{a} \in \Gamma^n, \Gamma^n_0$ であることに注意.]

注意　$\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{S}_3) \Leftrightarrow e^{\underline{b}} \succ e^{\underline{a}}$ $(\mathcal{T}_3, \mathbb{R}^n_+)$（ただし指数関数は成分ごとに指数関数値をとるものとする。）

説明　定義 $\mathcal{T}_i$ をすべて注意のように $\mathcal{S}_i$ に変換して定義することもできる。しかしこのような定義は Δ^n_0, Δ^n ではなく，積が一定という集合内での順序となる。$\mathbb{R}^n_+$ に関しては，成分の和でなく，幾何平均で正規化することになる。このような定義よりも単体 Δ^n_0, Δ^n 内での順序の方が実用上便利のようである。$\mathcal{T}_3$ は，$a_{i+1}/a_i \leq b_{i+1}/b_i$, $i=1,\cdots,n-1$ と同等，また $\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_3) \Leftrightarrow \underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{c}/\|\underline{a}\cdot\underline{c}\|$, $\underline{a},\underline{b},\underline{c} \in \Delta^n_0$. つまり定理 2.2 の条件は；$\phi(\cdot)$ が $\mathcal{T}_3$ に関して単調非減少；と同等である。$\mathcal{T}_2$ はそもそも指数性の検定統計量として導入された概念である.

定理 4.1　$\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_3)$ は，$\underline{a}$ に依存する $(n-1)\times n$ 行列 $L_3(\underline{a})$ を用いて $L_3(\underline{a})(\underline{b}-\underline{a}) \geq \underline{0}$ と表わせる．これは同様の行列 $K_3(\underline{a})$ により $\underline{b}-\underline{a} \in K_3(\underline{a})'\mathbb{R}^{n-1}_+$ と同等である。関数 $H(\underline{x})$ が $\mathcal{T}_3$ に関して単調非減少であるための必要十分条件は

$K_3(\underline{x})\,\mathrm{grad}\,H(\underline{x}) \geq \underline{0}$, $\underline{x} \in \Delta^n_0$ である。（$\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1$ に関する諸条件は $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_1$ に関するものと同じである。）

$$L_3(\underline{a}) = \begin{bmatrix} -a_2 & a_1 & 0 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & a_2 & \cdot\cdot & 0 & 0 \\ & \cdots & & & \cdot\cdot & \\ 0 & 0 & 0 & & -a_n & a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$K_3(\underline{a}) = \begin{bmatrix} -a_1 & \dfrac{a_2 a_1}{\Sigma_2^n a_j} & \dfrac{a_3 a_1}{\Sigma_2^n a_j} & \cdots & \dfrac{a_n a_1}{\Sigma_2^n a_j} \\ -a_1 & -a_2 & \dfrac{a_3(a_1+a_2)}{\Sigma_3^n a_j} & \cdots & \dfrac{a_n(a_1+a_2)}{\Sigma_3^n a_j} \\ & \cdots & & & \cdot\cdot \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & \dfrac{a_n \Sigma_1^{n-1} a_j}{a_n} \end{bmatrix}.$$

<u>定理 4.2</u>　$\underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_3) \Rightarrow \underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_2) \Rightarrow \underline{b} \succ \underline{a}$ $(\mathcal{T}_1)$ である。関数 $H(\underline{x})$ が $\mathcal{T}_1$ に関して単調非減少 $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_2$ に関し〃 $\Rightarrow$ $\mathcal{T}_3$ に関し〃。したがって検定関数 $\Phi(\underline{W}(\underline{X}))$ が $\mathcal{T}_1$ または $\mathcal{T}_2$ に関して単調非減少であれば Longer Tail Problem にたいして不偏であり，$1-\Phi(\underline{W}(\underline{X}))$ が Shorter Tail Problem にたいして不偏である。

$L_3(\underline{1}) = L_3$，$\mathrm{diag}(n-1, \cdots, 1)\, K_3(\underline{1}) = K_3$ であり，$\mathcal{T}_3 \Rightarrow \mathcal{T}_2$ の極限として $f_3 \Rightarrow f_2$ が導かれる。$\mathcal{T}_2 \Rightarrow \mathcal{T}_1$ と $f_2 \Rightarrow f_1$ はもちろん同じことである。

以上