

逐次選択問題におけるサンプリング方式と  
停止規則(I)

熊本女子大 城島邦行  
大分大 工 末貞俊一  
大分大 工 杉村正彦  
九大 理 浅野長一郎

§1. 問題の提起

1.1 問題の提起

二種の医学処理法の優劣判定問題に際しては特にオ1種・オ2種の判定エラーの確率の値を先験的に与えることは困難であるので、Decision Theoryの観点から最適と考えられる逐次優劣判定法を与えようというのが本講演の目的である。

即ち、2つの処理法A, Bの何れか一方で処理されるべき、サイズNの個体集団があり、A, Bの有効率 $p_A, p_B$ は未知であるとする。

その個体集団から対の形で逐次とられた個体の組に対して、一方にはAを他方にはBを施して得られる互いに独立な0-1変数の組を $(X_A, X_B)$ とする。(即ち、サンプリング方式は

Vector at the Time (VTR)方式と11)ことである。これと対比すべきものとして、(II)で述べる Play-the-Winner (PWR)方式が考えられる) として A, B 間の相対的優劣性を三つのパラメータ  $p_1 = \Pr\{(x_A, x_B) = (0, 1) | p_A, p_B\}$ ,  $p_2 = \Pr\{(x_A, x_B) = (1, 1) \text{ or } (0, 0) | p_A, p_B\}$ ,  $p_3 = \Pr\{(x_A, x_B) = (1, 0) | p_A, p_B\}$  により、「 $p_1 > 0.5$  なら B は A より優性 ( $B > A$ )、 $p_3 > 0.5$  なら A は B より優性 ( $A > B$ )、 $p_1 \leq 0.5$  且  $p_3 \leq 0.5$  なら  $A = B$ 」と定義する。更に実験に際してのコストとしては倫理的観点に重点を置いて「1個体が劣性処理を受ける際の損失のみを考えることにし、それは  $B > A$  なら A を施す時  $\delta = 0.5 - (p_2 + p_3) = p_1 - 0.5$  に比例し、 $A > B$  なら B を施す時  $\delta = 0.5 - (p_2 + p_1)$

$= p_3 - 0.5$  に比例し、 $A = B$  なら  $\delta = 0$

に比例する」ものと仮定する。(Fig. 1 参照)  
以上の逐次実験は一定の与えられた判定-停止規則により終了させること

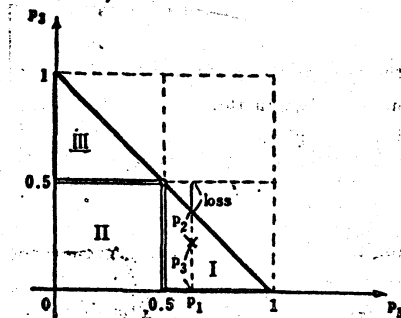


Fig 1. Three parameter domains

にする。そして、その際  $A = B$  と判定された処理法を残りの全個体に施すことにし、またその際  $A = B$  と判定されたら残りの全個体の各々には等確率 0.5 で A, B を施すという方式を考え、その方式の下での、優劣判定前及び後にあたっての全平均損失(その際  $p_1, p_3$  についての先験確率分布  $g(p_1, p_3)$  を前提とした overall average risk を考える。)を最小ならしめるような判定-停止規則

をもった最適逐次優劣判定法を求めたい。そしてその判定・停止規則として、〔1〕垂直型截断法 (Closed Unwedged Plan), 〔2〕楔型截断法 (Closed Wedged Plan) 〔3〕非截断法 (Open Plan) について考察することにする。

## 1.2 歴史

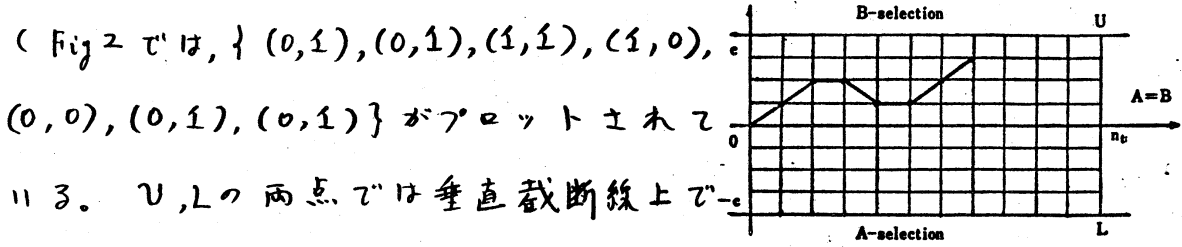
1.1 で述べた問題についての基本思想は Armitage [1], [2], Bross [3] に興し, 711 で Colton [5], Sugimura [6], Zelen 等によって倫理的観点より更に深化させられた。そして, Choi [4], Sugimura - Goto - Asano [7] において, tied pairs を除外した場合について本問題を取り扱い, 特に [7] においては実用可能な数値表の形にまとめられた。更に Sugimura - Suesada - Asano [8], [9] では, tied pairs もも含めた一般の場合について本問題を取り扱ったが, 現在この一般の場合についての実用的数値表の作成も続行中である。

## § 2. 三種の判定停止規則を設定した場合の解析

### 2.1 垂直型截断法 [8]

§ 1 で述べた逐次実験の各段階において, 累和  $Z(\lambda_0 - \lambda_1)$  が初めて一定値  $C (> 0)$  ないしは  $-C$  に到達したら, B ないし A を優性と判定して逐次実験を停止することにし, また前以て与えられた実験実施可能の最大限の対数  $M_t$  に達しても尚判定が

かないなら  $A=B$  と判定することにする。



はなく, それぞれ B-選択線上, A-選択線上にあるものとする。 ( Fig. 2 垂直型截断法 ( $c=4$ ) ( $m_t=11$ ) ) その時

- (1)  $\alpha_1 = P_r \{ B\text{-優性} \text{と判定} \mid p_1, p_3; c, m_t \} = S_0 \cdot T^h \cdot E_1$
- (2)  $\alpha_3 = P_r \{ A\text{-優性} \text{と判定} \mid p_1, p_3; c, m_t \} = S_0 \cdot T^h \cdot E_{2c+1}$
- (3)  $\alpha_2 = P_r \{ A=B \text{と判定} \mid p_1, p_3; c, m_t \} = S_0 \cdot T^h \{ E_2 + E_3 + \dots + E_{2c} \} = 1 - \alpha_1 - \alpha_3$

が得られる。但し,

(4)  $S_0 = (s_1, s_2, \dots, s_{2c+1})$  は  $(2c+1)$  次元ベクトルで,  $c$  番目のサンプリング段階での, 所謂初期確率を与えるもので, 且その各成分  $s_l$  ( $l=1, 2, \dots, 2c+1$ ) は

(5)  $s_l = \sum_{(m_1, m_2, m_3)} \frac{c!}{m_1! m_2! m_3!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3}$  (但し,  $\sum_{i=1}^3 i m_i = c+l-1, \sum_{i=1}^3 m_i = c, 0 \leq m_1, m_2, m_3 \leq c$  を満たす 3 整数値  $(m_1, m_2, m_3)$  のすべての組合わせに於いての和を表わす。) であり,

(6)  $T = T(p_1, p_3) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は  $c$  番目のサンプリング段階でのパス点から  $(c+1)$  番目の段階でのパス点への  $(2c+1) \times (2c+1)$  次の推移確率行列を表わし

(7)  $E_j$  は  $\alpha_j$  要素のみが  $\pm 1$  で、他はすべて  $0$  である  $(2c+1)$  次の基本ベクトルで ( $j = 1, 2, \dots, 2c+1$ )

(8)  $h = m_t - c$

である。そして判定停止規則に基づいて実験が終了するまでの平均検査対数は

(9)  $E(m) = E(m | p_1, p_3; c, m_t) = m_t - \sum_{k=0}^{h-1} (S_0 T^k E_1 + S_0 T^k E_{2c+1})$

更に  $(p_1, p_3)$  に関する与えられた先験分布  $g(p_1, p_3)$  の下での Overall average risk の形は

(10)  $E_{Loss}/Nq = \frac{1}{Nq} \left\{ \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^{1-p_1} [E_{Loss}]_A g(p_1, p_3) dp_1 dp_3 + \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^{1-p_3} [E_{Loss}]_B g(p_1, p_3) dp_1 dp_3 \right\}$

$= \frac{1}{2} \left[ \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^{1-p_1} (p_1 - 0.5) \{ 1 + (1 - 2E(m)/N) \cdot (\alpha_3 - \alpha_1) \} g(p_1, p_3) dp_1 dp_3 \right.$   
 $\left. + \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^{1-p_3} (p_3 - 0.5) \{ 1 + (1 - 2E(m)/N) \cdot (\alpha_1 - \alpha_3) \} g(p_1, p_3) dp_1 dp_3 \right]$  となる。

2.2 楔型截断法

この方法は B-選択線、A-選択線は 2.1 の垂直型截断法と同じであるが、 $A = B$  と判定する。所謂

実験停止線は Fig-3 のような

楔型にするものである。但し、 $\theta = \angle UPm_t > \pi/4$  だが、 $\pi/4$  にほぼ等しくとっている。

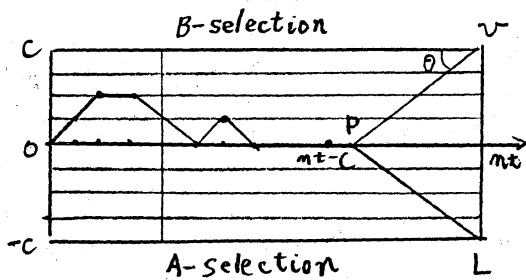


Fig.3 Closed Wedged Plan ( $c=4, m_t=13$ )

この時、 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  は (1) (2) (3) と同様であるが、平均検査対数は

$$\begin{aligned}
 (11) \ E(m) = E(m | p_1, p_3; C, M_L) = & \left\{ M_L (S_0 T^h + S_0^* T^{*h}) - \sum_{k=0}^{h-1} (S_0 T^k + S_0^* T^{*k}) \right\} \cdot E_1 \\
 & + (h+1) \left\{ S_0 T^{h-c} (E_c p_3 + E_{c+1} p_2 + E_{c+2} p_1) \right\} \\
 & + M_L (S_0 T^{h-1} + S_0^* T^{*h-1}) \cdot E_2 \cdot p_2 \\
 & + \sum_{k=1}^{c-2} (h+1+k) \left\{ S_0 T^{h-c+k} (E_{c-k} p_3 + E_{c-k+1} p_2) \right. \\
 & \left. + S_0^* T^{*h-c+k} (E_{c-k} p_1 + E_{c-k+1} p_2) \right\}
 \end{aligned}$$

となる。但し、 $S_0^*, T^*$  はそれぞれ  $S_0, T$  において  $p_1$  と  $p_3$  を交互に入れ換えたものである。また全平均損失は (10) 垂直型截断法の場合のそれと同じ形である (但し (10) 式中の  $E(m)$  は (11) である)

### 2.3 非截断法 [9]

B-選択線, A-選択線は 2.1, 2.2 の截断法と同様であるが

最大限の実験対数の存在を仮定する必要がない程大きい場合を考察する。記号  $S_0, T$  は今迄の (4) ~ (6)

と同じとすれば、 $T$  において、 $\sigma(2c+1)$  行を  $\sigma$  1 行へ移し、それから次に  $\sigma(2c+1)$  列を  $\sigma$  1 列へ移した結果を  $T_0$  とおく

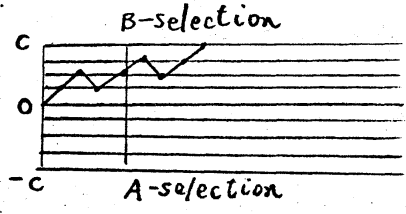


Fig. 4 Open Plan (c=4)

$$(12) \ T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline Q & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Markov chainsに関する基本性質から、 $c$ 番目のサンプリング段階でのパス点から  $c(c+j)$  番目のサンプリング段階でのパス点への推移確率行列は

$$(13) \quad T_c^j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R}_j & \mathbf{Q}^j \end{bmatrix}$$

となる。但し、 $\mathbf{R}_j$  は  $c$  番目の段階での内部パス点 ( $c, 2c, 3c, \dots, 2c$  番目のパス点) より、 $c(c+j)$  番目の段階での  $c(2c+1)$  番目あるいは  $c$  番目のパス点への推移確率行列で、 $\mathbf{Q}^j$  は  $c$  番目の段階での  $c, 2c, 3c, \dots, 2c$  番目の各パス点より  $c(c+j)$  番目の段階での  $c, 2c, 3c, \dots, 2c$  番目のパス点への推移確率行列を表わし、 $\mathbf{I}$  は  $2 \times 2$  の単位行列を、 $\mathbf{O}$  は  $2 \times (2c-1)$  の zero 行列である。その時  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{Q}^j = \mathbf{O}$  が成立する。即ち、 $c$  段階での内部パス点は段階数が無限に増加してゆけば遂には上、下二本の B-select 線、A-select 線の何れかに吸収されてしまう。従って、

$$(14) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} T_c^j = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{R}^* & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \text{となり、} \quad \text{幾々の逐次実験計画が}$$

B-select ないしは、A-select で遂には終る確率は 1 である。但し、

$$(15) \quad \mathbf{R}^* = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{R}_j = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{R} \\ = \begin{bmatrix} p_3^{2c-1}, p_3^{2c-2} D_1, p_3^{2c-3} D_2, \dots, p_3^2 D_{2c-3}, p_3 D_{2c-2} \\ p_1 D_{2c-2}, p_1^2 D_{2c-3}, p_1^3 D_{2c-4}, \dots, p_1^{2c-2} D_1, p_1^{2c-1} \end{bmatrix} \times \frac{1}{D_{2c-1}}$$

$D_{2c-1}$  = 行列式  $|I - Q|$  であり,  $D_k = (p_1 + p_3) \cdot D_{k-1} - (p_1 p_3) \cdot D_{k-2}$

( $k=2, 3, \dots, 2c-1$ ),  $D_0 \equiv 1$ ,  $D_1 = p_1 + p_3$  である。かくて,

$$(16) \quad \alpha_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} S_0 \cdot T^j \cdot E_1 = \Delta_1 + \sum_{i=1}^{2c-1} \Delta_{i+1} \cdot p_1^i \cdot D_{2c-1-i} / D_{2c-1}$$

$$(17) \quad \alpha_3 = \lim_{j \rightarrow \infty} S_0 \cdot T^j \cdot E_{2c+1} = \Delta_{2c+1} + \sum_{i=1}^{2c-1} \Delta_{i+1} \cdot p_3^{2c-i} \cdot D_{i-1} / D_{2c-1}$$

( $\alpha_1 + \alpha_3 = 1$  である)

$$(18) \quad E(m) = E(m | p_1, p_3; c) = c + \sum_{j=1}^{2c-1} \sum_{i=1}^{2c-1} \Delta_{i+1} a_{ij}$$

但し,  $a_{ij}$  は  $[I - Q]^{-1}$  の  $(i, j)$  要素である。また全平均損失は  
 截断法の場合 (10) と違つた形 (19) になる。(但し (19) 式中の  $\alpha_1$ ,  
 $\alpha_3$  及び  $E(m)$  はそれぞれ (16), (17) 及び (18) である。)

$$(19) \quad EL_{OSS}/Ng = \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^{1-p_1} \{p_1 - 0.5\} \cdot \left\{ (E(m)/N) + [1 - (2E(m)/N)] \alpha_3 \right\} \cdot g(p_1, p_3) dp_1 \cdot dp_3 \\
 + \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^{1-p_1} (p_3 - 0.5) \cdot \left\{ (E(m)/N) + [1 - (2E(m)/N)] \alpha_1 \right\} \cdot g(p_1, p_3) dp_1 \cdot dp_3$$

### §3 数値例

3.1 截断法では,  $m_t = 10(10)50$ ,  $c = 4(1)10$  ( $2c \geq m_t$ ),  $p_1, p_3 = 0.1(0.1)0.9$

について  $\alpha_1, \alpha_3, E(m)$  を, 表 1 の各危険分布  $g(p_1, p_3)$  に

ついて,  $N = 1000$  の場合の全平均損失を計算した。

まず垂直型截断法の場合:

(i)  $\alpha_1 = 1$  として:

$$\textcircled{1} \alpha_1(p_1 = a, p_3 = b; c, m_t) = \alpha_3(p_1 = b, p_3 = a; c, m_t)$$



② 任意に定めた  $(C, M_t)$  に対して,

$$\begin{cases} p_3 \text{ が一定の時, } p_1 \text{ の増加につれて, 増加する} \\ p_1 \text{ が一定の時, } p_3 \text{ の増加につれて, 減少する} \end{cases}$$

③ 任意に定めた  $(p_1, p_3; M_t)$  に対して,  $C$  が  $4 \rightarrow 10$  と増加すれば, 減少する. 且して,  $M_t$  がある値以下で且  $|p_1 - p_3|$  が大なら, たとえ  $C$  値が増加してもその減少の割合はあきらかである.

④ 任意に定めた  $(p_1, p_3; C)$  に対して,  $M_t$  が増加すれば, 増加する. 且して  $C$  がある値以上で且  $|p_1 - p_3|$  が小なら, その増加の割合は急速である.

(ii)  $E(M)$  について:

① 任意に定めた  $(C, M_t)$  に対して,  $E(M | p_1 = a, p_3 = b) = E(M | p_1 = b, p_3 = a)$

② 任意に定めた  $(C, M_t)$  に対して  $|p_1 - p_3|$  が減少する程  $E(M)$  は増加する.

③ 任意に定めた  $M_t$  に対して,  $C$  が増加すれば  $E(M)$  も増加する. 且して  $M_t$  が  $10 \rightarrow 50$  と増加し且  $|p_1 - p_3|$  が大であれば, その増加の状態は急激となる.

④ 任意に定めた  $C$  に対して,  $M_t$  が増加すれば  $E(M)$  も増加する.

(iii)  $E \text{ Loss} / NG$  について

①  $M_t$  が小 ( $10, 20$ ) なら,  $C$  が  $4 \rightarrow 10$  と増加すれば  $\overline{E \text{ Loss}}$  も増加する.

一方  $M_t$  が大 ( $30 \sim 50$ ) なら,  $C$  の変動による  $E \text{ Loss}$  のカーブは

$C = 5 \sim 6$  で最小値をもった下に凸の状態である.

②  $c=4(1)10, M_t=20(10)50$ , にあつての  $\text{Max. } \overline{E\text{Loss}}, \text{Min. } \overline{E\text{Loss}}$

は先験分布が  $R_1 \rightarrow S_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow S_2 \rightarrow L_2$  変つてつれて, 前者は  $0.01926 \sim 0.03475$  と約1.8倍増加するが, 後者は  $0.00258 \sim 0.00381$  と約1.5倍増加する.

③ 実施場面において,  $M_t$  を少なくとも50とつりうるなら,

$\text{Min-ELoss}$  を与える最適な  $c$  の値  $c^*$  は各先験分布について表2表の如くなる. 表1表

| Type                                | S <sub>1</sub>     |                    |                    | S <sub>2</sub>     |                    |                    | S <sub>3</sub>     |      |                    | R <sub>1</sub>     |                    |            |
|-------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------|--------------------|--------------------|--------------------|------------|
| p <sub>1</sub>                      | 0.7                | 0.8                | 0.9                | 0.6                | 0.7                | 0.8                | 0.4                | 0.5  | 0.6                | 0.7                | 0.8                | 0.9        |
| p <sub>3</sub>                      | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1                | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1                | 0.6                | 0.5  | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1<br>0.2         | 0.1        |
| g(p <sub>1</sub> , p <sub>3</sub> ) | 0.25               | 0.50               | 0.25               | 0.25               | 0.50               | 0.25               | 0.25               | 0.50 | 0.25               | 0.15               | 0.50               | 0.35       |
| Type                                | R <sub>2</sub>     |                    |                    | R <sub>3</sub>     |                    |                    | L <sub>1</sub>     |      |                    | L <sub>2</sub>     |                    |            |
| p <sub>1</sub>                      | 0.6                | 0.7                | 0.8                | 0.4                | 0.5                | 0.6                | 0.7                | 0.8  | 0.9                | 0.6                | 0.7                | 0.8        |
| p <sub>3</sub>                      | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1                | 0.6                | 0.5                | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1  | 0.1                | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1<br>0.2 |
| g(p <sub>1</sub> , p <sub>3</sub> ) | 0.15               | 0.50               | 0.35               | 0.15               | 0.50               | 0.35               | 0.35               | 0.50 | 0.15               | 0.35               | 0.50               | 0.15       |
| Type                                | L <sub>3</sub>     |                    |                    | S <sub>0</sub>     |                    |                    |                    |      |                    |                    |                    |            |
| p <sub>1</sub>                      | 0.4                | 0.5                | 0.6                | 0.1                | 0.2                | 0.3                | 0.4                | 0.5  | 0.6                | 0.7                | 0.8                | 0.9        |
| p <sub>3</sub>                      | 0.6                | 0.5                | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.6 0.7<br>0.8 0.9 | 0.6 0.7<br>0.8 0.9 | 0.6<br>0.7         | 0.6                | 0.5  | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1 0.2<br>0.3 0.4 | 0.1<br>0.2         | 0.1        |
| g(p <sub>1</sub> , p <sub>3</sub> ) | 0.35               | 0.50               | 0.15               | 1/9                | 1/9                | 1/9                | 1/9                | 1/9  | 1/9                | 1/9                | 1/9                | 1/9        |
| Type                                | H                  |                    |                    |                    |                    |                    |                    |      |                    |                    |                    |            |
| p <sub>1</sub>                      | 0                  | 0.1                | 0.2                | 0.3                | 0.4                | 0.6                | 0.7                | 0.8  | 0.9                | 1                  |                    |            |
| p <sub>3</sub>                      | 0.6 0.7<br>0.8 0.9 | 0.6 0.7<br>0.8 0.9 | 0.6 0.7<br>0.8 0.9 | 0.6<br>0.7         | 0.6                | 0                  | 0                  | 0    | 0                  | 0                  | 0                  | 0          |
| g(p <sub>1</sub> , p <sub>3</sub> ) | g <sub>3</sub>     |                    |                    |                    |                    |                    | g <sub>1</sub>     |      |                    |                    |                    |            |

表2表

| a priori distribution | R <sub>1</sub> | S <sub>1</sub> | L <sub>1</sub> | R <sub>2</sub> | S <sub>2</sub> , L <sub>2</sub> , R <sub>3</sub> , S <sub>3</sub> , L <sub>3</sub> |
|-----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--|
| c*                    | 4, 5           | 5              | 5              | 5              | 6  |

(n<sub>t</sub> = 50)

## 3.2 楔型截断法

(i)  $\alpha$  について: ①, ②, ④は3.1の場合と同様である。

③任意に定めた  $(p_1, p_3; M_t)$  に対して,  $C$  が  $4 \rightarrow 10$  と増加すれば, 減少する。そして,  $M_t$  がある値以上で且  $|p_1 - p_3|$  が大なら, たとえ  $C$  が増加してもその減少の割合はわずかである。

(ii)  $E(m)$  について:

① については3.1と同様。

② についても大体において3.1と似ているが (即ち,  $|p_1 - p_3|$  が減少すれば  $E(m)$  は増加する。)  $|p_1 - p_3|$  が大きい所では  $E(m)$  の変動はわずかであり, また  $M_t$  が大きい時は  $|p_1 - p_3|$  の減少に伴った  $E(m)$  の増加の割合は非常に大である。

③  $M_t$  が大きい  $(40, 50)$  か,  $|p_1 - p_3|$  が大きい  $((.7, .1), (.6, .1))$  時には  $E(m)$  は  $C$  に関して単調増加であるが,  $M_t$  が小さく  $(20, 30)$  であり且  $|p_1 - p_3|$  も小さい時には,  $C$  の変動による  $E(m)$  のカーブは  $C = 6 \sim 9$  で頂点をもった上に凸の状態である。

④ 3.1の場合と同様であるが,  $C$  の値が大きい場合程,  $M_t$  の増加に伴った  $E(m)$  の増加は急速である。

(iii)  $E_{Loss}/NG$  について:

① は3.1の場合と大体同様であるが, 但し,  $M_t = 30 \sim 50$  の時の  $E_{Loss}$  のカーブの最小点を与える  $C$  の値は  $4$  or  $5$  or  $6$  となっている。

- ② 先験分布が  $R_1 \rightarrow S_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2$  への変った場合の,  $\text{Max } \overline{E_{\text{Loss}}}$ ,  $\text{Min } \overline{E_{\text{Loss}}}$  の変動状態は大體において 3.1 と同様に約 1 倍  
 半だけ増加するが  $(R_2, S_2, L_2) \rightarrow (R_3, S_3, L_3)$  へと変れば、  
 それらは逆に減少する。
- ③  $n_t$  が少なくとも 50 とりするなら,  $\text{Min. } \overline{E_{\text{Loss}}}$  を与える最適  
 な  $c$  の値は, 各先験分布について, 次のオ3表の如くである。

オ3表 最適計画 ( $n_t = 50$ )

| 先験分布 | $R_1, S_1, L_1, R_2$ | $S_2, L_2, R_3, S_3, L_3, S_0$ |
|------|----------------------|--------------------------------|
| $c$  | 4                    | 5                              |
|      |                      | 6                              |

3.3 非截断法:  $c = 4(1)10$ ,  $p_1, p_3 = 0.1(0.1)0.9$  について,  $\alpha_1, \alpha_3$ ,  $E(n)$  を, 表1の各先験分布  $g(p_1, p_3)$  について  $N = 1,000$  の  
 場合の全平均損失を計算した。

(i)  $\alpha_1$  について

① ② については截断法の場合と同様である。

③  $p_1 > p_3$  なる任意の  $(p_1, p_3)$  に対しては,  $c$  が  $4 \rightarrow 10$  へと増加  
 すれば,  $\alpha_1$  も増加する。そして, その値は遂にはほぼ 1 に等し  
 くなる。また  $p_1 - p_3 \geq 0.1$  であれば,  $\alpha_1$  の値は任意の  $c$  値の場  
 合に, 0.7 ぐらいの値より大きくなる。ただし  $p_1, p_3$  が 0.5 に非常  
 に近ければ急速に 0.5 に近い値をとるようになり,  $p_1 = p_3 =$   
 0.5 では完全に 0.5 に等しくなる。これは截断法の場合の ③, ④  
 とは異なった性質である。

(ii)  $E(m)$  について

① は截断法と同様

② については「任意に定めた  $C$  値に対して、 $|p_1 - p_3|$  が減少すれば  $E(m)$  が増加する」という点は截断法と同様であるが、更に「たとえ  $|p_1 - p_3|$  は一定であっても、 $p_1, p_3$  が共に 0 に近づぐにつれて、 $E(m)$  は増加する」という特異性質が見られる。

③ 任意に定めた  $(p_1, p_3)$  に対して、 $C$  が  $4 \rightarrow 10$  と増加すれば  $E(m)$  も単調に増加する（これは垂直型截断法と同様）。そしてその増加の割合は  $|p_1 - p_3|$  が減少するにつれ、あるいは  $|p_1 - p_3|$  がたとえ一定であっても  $p_1, p_3$  が共に 0 に近づぐにつれて、より大となる。

(iii)  $E_{Loss}/NG$  について

① は截断法と同様

②  $E_{Loss}/NG$  の、 $C$  の変動に伴ったカーブは、 $R_1, S_1, L_1$  型では  $C=5$  で、 $R_2, S_2, L_2$  型では  $C=6$  or  $7$  で、 $R_3, S_3, L_3$  型では  $C \geq 9$  で、最小点をもつような下に凸の状態である（カーブの Fig は省略）

③  $g(p_1, p_3)$  が  $(R_1, S_1, L_1) \rightarrow (R_2, S_2, L_2)$  へと変れば、 $E_{Loss}$  の変動は範囲 (Range) の観点から安定した状態となるが、更に  $g(p_1, p_3)$  が  $(R_2, S_2, L_2) \rightarrow (R_3, S_3, L_3)$  へと変れば、不安定な状態となる。

④ 各先験分布での最適計画は次の表の如くなる。

表4 表 最適計画

| 変数分母  | $R_1, S_1, L_1$ | $R_2, S_2, L_2$ | $R_3$ | $S_3, L_3$    | $S_0$ |
|-------|-----------------|-----------------|-------|---------------|-------|
| $C^*$ | 5               | 6               | 7     | $C^* \geq 10$ | 7     |

## 3.4 三種の判定停止規則に基づいた場合の比較

3.4.1  $E(m)$ について

## (イ) 截断法において、垂直型と楔型との比較

①  $|p_1 - p_3|$  が大なる時、共通の  $Mx, C, (p_1, p_3)$  に対して、 $E_w(m) \doteq E_{ow}(m)$

((.7, .1) or (.6, .1))

②  $|p_1 - p_3|$  がある値より小さくなるにつれて、(例えば、 $(p_1, p_3)$  :

(.6, .3)  $\rightarrow$  (.4, .1)  $\rightarrow$  (.5, .3)  $\rightarrow$  (.4, .4) 即ち  $|p_1 - p_3| = .3 \rightarrow .2 \rightarrow .0$ )

$E_w(m) < E_{ow}(m)$  であって、その時、 $Mx/C$  が小さくなるにつれて (即ち楔型の切りこみが相対的に大きくなってゆけば)

その差 ( $E_{ow}(m) - E_w(m)$ ) は増加する。

## (ロ) 非截断法と截断法との比較

① 同一の  $C, p_1, p_3$  の下では、 $E_o(m)$  は  $Mx = 50$  の場合の  $E_w(m)$ 、

$E_{ow}(m)$  に等しいか、わずかにそれより大きくなる

② そして、①の場合の両者の差  $E_o(m) - E_w(m)$  (or  $E_o(m) - E_{ow}(m)$ )

は、 $|p_1 - p_3|$  が小さくて且  $C$  が大きいなら、次々に大となる。

③ また、①の場合の両者の差は  $|p_1 - p_3|$  が大きいか ((.7, .1),

(.6, .1)) あるいは  $C$  が小さいか ( $C=4$ ) であれば、ほぼ等し

くなる。

(注意: ②, ③の現象は, 「Open Typeでは裁断線がない」という  
 事実起因しているものと考えられる。即ち, ②での $\sim$ の  
 条件下ではそれが $E(m)$ の大きさにほぼ効いてくるであろ  
 うし, ③での $\sim$ の条件下ではそれが $E(m)$ の大きさに殆んど  
 効いてこないのであろう。)

### 3.4.2 $E_{Loss}/NG$ について

(イ) 裁断法において, 垂直型と楔型との比較

$(E_{Loss})_{\text{w}} \approx (E_{Loss})_{\text{uw}}$ , 従って  $m/c$  が小さくて且  $p_1 = p_3$  であ  
 るような実験の場合では, ( $E_{Loss}$  の観点からは両者殆んど優劣  
 なく, むしろ楔型を判定法の判定・停止規則として採用した方が)  
 宜しかろう。

(ロ) 非裁断法と裁断法との比較

同一の  $c$  値, 同一型の先験分布の場合,  $(E_{Loss})_0$  は  $m/c = 50$  の場合  
 での  $(E_{Loss})_{\text{w}}$ ,  $(E_{Loss})_{\text{uw}}$  よりわずかに小さい。

### 3.4.3 一応の結論

$m/c$  を非常に大きくとれるような実験の場合では, 次のような二つ  
 の場合には, 両裁断法よりもむしろ非裁断法の方を適用すべき  
 であろう。即ち,

(a)  $E_{Loss}$  の値を出来るだけ減少させたいという観点に重きを  
 置くならば,  $c$  が大きくて, 且先験分布として  $(R_1, S_1, L_1)$   
 型よりもむしろ  $(R_2, S_2, L_2)$  型の方が好ましいような場合は

非裁断法を用いよ」

ということがある。

#### § 4. 今後の課題

4.1: 上述の問題についての数値例を、より広い範囲にあたっての  $C, m, p_1, p_2$  について、及び種々の  $g(p_1, p_2), N$  について計算を続行中である。これによって、 $p_1, p_2, C, m$  の変動に伴った  $\alpha_1, \alpha_3$  および  $g(p_1, p_2)$  に起因する  $E_{Loss}$  の変動状態をもより詳細に把握したい。かくて、三つの判定・停止法による、 $\alpha_1, \alpha_3, E(m)$  及び  $\overline{E_{Loss}}$  についてのより詳細な比較、並びに優劣性の検討をも行なえようし、引いては、実験実施面でのより有効な判定法を具体的に探ることが可能となろう。

4.2: 本問題では、1個体に1つの処理法を施した場合の効果をも2値的に考えたが、これを多項的に考えた場合の一般化も進行中である。



## 参考文献

- [1] Armitage, P., "Restricted Sequential Procedure", *Biometrika*, 44, 9-26 (1957).
- [2] Armitage, P., *Sequential Trials*, Blackwell Scientific Publications, Oxford, England (1960).
- [3] Bross, I., "Sequential Medical Plans", *Biometrics*, 8, 188-205 (1952).
- [4] Choi, I., "Truncated Sequential Designs for Clinical Trials Based on Markov-Chains", *Biometrics*, 24, 159-166 (1968).
- [5] Colton, T., "A Model for Selecting One of Two Medical Treatments", *J. Am. Stat. Assoc.*, 58, 388-400 (1963).
- [6] Sugimura, M., "Optimum Designs for Selecting One of Two Treatments, Fixed Sample Size Plan and Sequential Plan in a Population with One Parameter Exponential Distribution", *Bull. Math. Stat.*, 13, No. 1~2, 1-23 (1968).
- [7] Sugimura, M., Goto, M and Asano, C., "Numerical Tables of Optimum Sequential Designs Based on Markov-Chains for Selecting One of Two Medical Treatments", *Bull. Math. Stat.*, 14, 27-56 (1971).
- [8], [9] Sugimura, M., Suesada, S., and Asano, C., *Rep. Fac. of Engrg., Oita Univ.*, No. 1 (1975), No. 2 (1976).