数理解析研究所講究録
273巻 1976年 174-197

一般化されたTeichmüller空間と微分方程式

中大理工　栗林暲和

方程式 $y^2=x(x-1)(x-z)$, $z\in\mathbb{C}-\{0,1\}$ によって定義されたRiemann面 $\{R(z)\}$ の族Fに対して各 $R(z)$ 上にただ1つの独立なabel微分 $\omega=y^{-1}dx$ が存在し, z を $\mathbb{C}-\{0,1\}$ を動く1つのパラメータとみるとき積分 $\int_g^h y^{-1}dx$ $(g,h=0,1,\infty)$ はGaussの微分方程式

$$z(z-1)\frac{d^2w}{dz^2}+(2z-1)\frac{dw}{dz}+\frac{w}{4}=0$$

の解である。方程式の2つの適当な解 $w_1(z)$, $w_2(z)$ をとり, $w_1(z)$, $w_2(z)$ の比を τ で表わすならば逆関数 $z(\tau)$ は上半 τ 平面において1価正則な関数である。

この論文の第1の目的はGaussの微分方程式に対してRiemann面の族Fを考えたように, Fuchs型の微分方程式に対するRiemann面の族を考察することである。§1と§2でこれらの事を研究する。第2の目的はShimura [9] によって導入された対称領域Hを考えることによりまた [5] によって導入さ

れたTeichmüller空間を考えることにより，これらの族において解析的性質を研究することである。§3においてそれらの事が説明される。そこにおける主要結果は定理（3.3.7）である。それはGaussの微分方程式の場合の拡張に対する1つの答になっている。

Riemann面の族Fにおいてパラメータzが上半平面におけるLambda関数であり，theta constantsの商によって表示されるように，オ3の目的は1.3で得られたパラメータの解析性を研究することである。§4にこの問題を考察する。ここにおいて1つの解答が定理（4.2.11）により与えられる。

§1 Riemann面の族 $\Omega(g', n, \{\nu_1, \cdots, \nu_r\})$

1.1 Rを種数 $g(\geq 1)$ のcompactなRiemann面とする。σ をRの1つの自己同型とする。Rと σ との対 (R,σ) を考える。(R,σ) と (R',σ') とが同型であるとは $f\sigma = \sigma' f$ であるholomorphic bijection $f: R \to R'$ が存在する場合をいう。(R,σ) の同型類を $\langle R,\sigma \rangle$ で表わす。n を1つの素数とする。$\{\nu_1, \cdots, \nu_r\}$ を $1 \leq \nu_i < n$ $(1 \leq i \leq r)$ であるような正の整数の1組とする。つぎの条件を満足する (R,σ) の同型類 $\langle R,\sigma \rangle$ の集合を

$$\Omega(g', n, \{\nu_1, \cdots, \nu_r\}) \quad または \quad \Omega(g', n, \{\nu_i\})$$

と表わす：

(1.1.1)　(i)　σ は r 個の不動点をもつ位数 n の自己同型である。

(ii)　R/G は種数 g' である。ここに $G=\{\sigma\}$。

(iii)　σ による不動点 q_i における局所座標を t_i とするとき，σ は $t_i \to \zeta^{\nu_i} t_i + \cdots$ $(\zeta = \exp(2\pi i/n))$ と表わされる。ここに $1 \leqq i \leqq r$。

明らかに係数 ζ^{ν_i} は局所座標の選択には依存しないから (iii) は well-defined である。

1.2.　K (resp. K') を R (resp. $R'=R/G$) 上の有理型関数体とする。そのとき，K は K' の Galois 拡大でその Galois 群は G と一致する。そのときは，$\sigma(y)=\zeta y$，$y^n \in K'$，$K=K'(y)$ となる K の元 y が存在する。従って，K' が有理関数体であるならば，Riemann 面 R の方程式をつぎのように表わすことができる：

(1.2.1)　$y^n=(x-a_0)^{m_0}(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_{s+1})^{m_{s+1}}$，$n \nmid m_0+m_1+\cdots+m_{s+1}$

ここに，$a_0, a_1, \ldots, a_{s+1}$ は互いに相異なる複素数である。さらに，$r=s+3$ そして $m_i\nu_i \equiv 1 \pmod n$ $(0 \leq i \leq s+1)$。また明らかに $2g=(n-1)(s+1)$。ν_r に関しては $(\sum_{i=0}^{s+1} m_i)\nu_r + 1 \equiv 0 \pmod n$ が成り立つ。(R,σ) の同型類 $\langle R,\sigma\rangle$ において，R の方程式が

(1.2.2)　$y^n = x^{m_0}(x-z_1)^{m_1}\cdots(x-z_s)^{m_s}(x-1)^{m_{s+1}}$

であるような代表元をみつけることができる。もちろん，$z_1, \cdots$

$, z_s, 0, 1$ は相異なる複素数である。この形を Riemann 面の正規形といい，この方程式によって定義された Riemann 面を $R(z)$ で表わし，$R(z)$ の才1種微分全体のなす $\mathbb{C}$ 上の vector 空間を $V(z)$ で表わす。つぎの補題が得られる：

(1.2.3) *Lemma*. $V(z)$ はつぎの形の才1種微分で生成される。(1) $\omega = x^{k_0}(x-z_1)^{k_1}\cdots(x-z_s)(x-1)^{k_{s+1}}y^{-l}dx$ $(0<l\leq n-1,\ 0\leq k_0, \ldots, k_{s+1}<n)$。ここで不等式

(2) $(n-1)+nk_i-lm_i \geqq 0 \quad (0\leqq i\leqq s+1)$

(3) $l(m_0+m_1+\cdots+m_{s+1})-n(k_0+k_1+\cdots+k_{s+1})\geqq n+1$

証明。$R(z)$ は自己同型 $\sigma: x\to x,\ y\to\zeta y$ $(\zeta=\exp 2\pi i/n)$ をもつ。$V(z)$ の適当な基底をとれば σ はつぎのような対角行列で表現される：

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_g\end{pmatrix}\sigma = \begin{pmatrix}\zeta_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \vdots\\ \omega_g\end{pmatrix}$$

ここに ζ_k $(1\leqq k\leqq g)$ は1の n 乗根である。ここから，

$$\omega_k\sigma = \zeta_k\omega_k \quad (1\leq k\leq g).$$

ところで，ω_k は x, y に関する多項式 $\phi(x,y)$ によって $\omega_k = \phi(x,y)y^{-n}dx$ と表わされる。それ故 $\omega_k\sigma = \zeta\phi(x,\zeta y)y^{-(n-1)}dx$。一方において，これは上記から $\zeta_k\omega_k = \zeta_k\phi(x,y)y^{-(n-1)}dx$ に等しい。ここから，$\phi(x,\zeta y)=\zeta^{\alpha}\phi(x,y)$ となる整数 α $(0\leq\alpha\leq n-1)$ が存在することがわかる。いま，$\phi(x,y)=a_0(x)y^m+\cdots+a_m(x)$ とお

く。$\phi(x,\zeta y) = a_0(x)\zeta^m y^m + a_1(x)\zeta^{m-1}y^{m-1} + \cdots + a_m(x)$ ，$\zeta^\alpha\phi(x,y) = a_0(x)\zeta^\alpha y^m + a_1(x)\zeta^\alpha y^{m-1} + \cdots + \zeta^\alpha a_m(x)$ で，条件 $\phi(x,\zeta y) = \zeta^\alpha\phi(x,y)$ から $a_{m-\alpha}(x)\zeta^\alpha y^\alpha$ という項以外はすべて 0 とならなければならない。それゆえ，$V(\mathfrak{z})$ の 1 つの基底をなす微分 ω_k $(1 \leqq k \leqq g)$ は $\omega_k = f(x)y^{-l}dx$ と表わされる。ここに l は整数 $(1 \leqq l \leqq n-1)$ で $f(x)$ は x の多項式。そこで問題はこの多項式が適当な整数 $k_0,\dots,k_{s+1}$ で，$f(x) = x^{k_0}(x-z_1)^{k_1}\cdots(x-z_s)^{k_s}(x-1)^{k_{s+1}}$ と表わされるかということである。そこで，$0, 1, z_1, \dots, z_s, \infty$ の上にある $R(\mathfrak{z})$ の点をそれぞれ $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_{z_1}, \dots, \mathfrak{q}_{z_s}, \mathfrak{q}_\infty$ とする。そのときは，

$$\mathrm{div}(x) = n\mathfrak{q}_0 - n\mathfrak{q}_\infty, \quad \mathrm{div}(x-1) = n\mathfrak{q}_1 - n\mathfrak{q}_\infty,$$

$$\mathrm{div}(x-z_i) = n\mathfrak{q}_{z_i} - n\mathfrak{q}_\infty \quad (1 \leqq i \leqq s),$$

$$\mathrm{div}(dx) = (n-1)\mathfrak{q}_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{s}(n-1)\mathfrak{q}_{z_i} + (n-1)\mathfrak{q}_1 - (n-1)\mathfrak{q}_\infty,$$

$$\mathrm{div}(y^{-l}dx) = \{(n-1)-lm_0\}\mathfrak{q}_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{s}\{(n-1)-lm_i\}\mathfrak{q}_{z_i} + \{(n-1)-lm_{s+1}\}\mathfrak{q}_1$$
$$+ \{l(\textstyle\sum_{j=0}^{s+1}m_j) - (n-1)\}\mathfrak{q}_\infty.$$

ここから明らかに $l(\sum_{j=0}^{s+1}m_j) \geqq n+1$。そこでまず，すべての i $(0 \leqq i \leqq s+1)$ に対して $n-1-lm_i \geqq 0$ と仮定する。そのときは明らかに $l(\sum_{j=0}^{s+1}m_j)-(n+1)-tn \geqq 0$ が成り立つ。ここに $t = \deg f(x)$。従って，$y^{-l}dx, y^{-l}x\,dx, \dots, y^{-l}x^t dx$ は第 1 種微分である。そして $f(x)y^{-l}dx$ はわれわれの微分で生成される。つぎに，$(n-1)-lm_i$ $(0 \leqq i \leqq s+1)$ のうちの 1 つが負，例えば，$(n-1)-lm_1 < 0$ とする。そのときは，$(n-1)+nk_1-lm_1 > 0$ であるよう

な正の整数 $k_1\ (\leqq t)$ が存在する。そして $f(x)$ は因子 $(x-z_1)^{k_1}$ を含まなければならない。それ故，$f(x)=(x-z_1)^{k_1}g(x)$。ここに $g(x)$ は多項式である。$k_0=\deg g(x)$ とおくならば，前と同様に，$(x-z_1)^{k_1}y^{-l}dx, \ldots, x^{k_0}(x-z_1)^{k_1}y^{-l}dx$ は才1種で，$f(x)y^{-l}dx$ はわれわれの微分で生成される。$(n-1)-lm_i\ (0\leqq i\leqq s+1)$ のうち2つが負であるときも同様に操作する。結局 $V(z)$ は (1) という型の才1種微分により生成されることがわかる。そのとき，それらが条件 (2) と (3) を満さなければならないことは因子の計算から明らかである。

1.3 さて，ここで一般化された Teichmüller 空間について簡単に説明する。$\langle R_0,\sigma_0\rangle$ が $\Omega(g',n,\{\nu_1,\ldots,\nu_r\})$ に所属しているような1つの対 (R_0,σ_0) を固定する。(R_0,σ_0) に位相同型である (R,σ) の同型類 $\langle R,\sigma\rangle\in\Omega(g',n,\{\nu_i\})$ からなる集合を $\Gamma(R_0,\sigma_0)$ とする。ここに (R,σ) が (R_0,σ_0) に位相同型であるとは，$f\sigma_0=\sigma f$ である位相写像 $f: R_0\to R$ が存在する場合をいう。つぎに，$\Gamma(R_0,\sigma_0)$ に所属の $\langle R,\sigma\rangle$ の代表元 (R,σ) と，(R_0,σ_0) から (R,σ) の上への方向を保存する位相写像の homotopy 類 α とからなる組を考える。(R,σ,α) が (R',σ',α') に同型であるとは homotopy 類 $\alpha'\alpha^{-1}$ に所属の (R,σ) から (R',σ') の上への同型が存在する場合をいう。$\langle R,\sigma,\alpha\rangle$ によって (R,σ,α) の同型類を表わす。すべての類 $\langle R,\sigma,\alpha\rangle$ の集合を $\Lambda(g',n,\{\nu_1,\ldots,\nu_r\};(R_0,\sigma_0))$ または簡単に

$\Lambda(R_0, \sigma_0)$ と表わす。つぎの補題が成立つ [5]:

(1.3.1) *Lemma.* 一般化された Teichmüller 空間 $\Lambda(g', n, \{\nu_1, \cdots, \nu_n\}; (R_0, \sigma_0))$ は単連結な $3g'-3+n$ 次元の複素解析的多様体である。$\Lambda(R_0, \sigma_0)$ から通常の Teichmüller 空間 T_g の中への写像を

$$\iota : \langle R, \sigma, \alpha \rangle \longmapsto \langle R, \alpha \rangle$$

で定義するとき，ι は同型写像である。$g' = 0$ ならば，$\Omega(g', n, \{\nu_i\})$ の各元はただ1つの $\Gamma(R_0, \sigma_0)$ に属する [5]。

(R_0, σ_0) の方程式の1つの normal form を

(1.3.2) $y^n = x^{m_0}(x - z_1^{(0)})^{m_1} \cdots (x - z_s^{(0)})^{m_s}(x-1)^{m_{s+1}}$, $n \nmid m_0 + \cdots + m_{s+1}$

とする。$\Gamma(R_0, \sigma_0)$ から一般化された Teichmüller 空間 $\Lambda(R_0, \sigma_0)$ をつくる。$\Lambda(R_0, \sigma_0)$ の任意の元を $\lambda = \langle R, \sigma, \alpha \rangle$ とする。$\lambda_0 = \langle R_0, \sigma_0, \alpha_0 \rangle$ から λ への homotopy 類 $\alpha^{-1}\alpha_0^{-1}$ に属するただ1つの extremal quasi-conformal mapping $f : \lambda_0 \mapsto \lambda$ が存在する。f は $f\sigma_0 = \sigma f$ という性質をもつ [5]。そのとき f は Riemann 球から Riemann 球への写像と考えられる。$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$ そして $f(z_i^{(0)}) = z_i$ $(1 \leq i \leq s)$。そこで λ の方程式として

(1.3.3) $y^n = x^{m_0}(x - z_1)^{m_1} \cdots (x - z_s)^{m_s}(x-1)^{m_{s+1}}$, $n \nmid m_0 + \cdots + m_{s+1}$

を得る。明らかに，$0, z_1, \cdots, z_s, 1$ は互いに相異なる。そしてパラメータ z_i $(1 \leqq i \leqq s)$ は一般化された Teichmüller 空間 $\Lambda(R_0, \sigma_0)$ 上の関数として考えられる。そのときつぎの補題を得る。

(1.3.4) *Lemma.* z_i $(1 \leqq i \leqq s)$ は $\Lambda(R_0, \sigma_0)$ 上で連続である。

証明. $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ の位相を Teichmüller 距離

(1.3.5) $\quad \mathrm{dist}(\lambda,\lambda') = \log K, \quad k=(K-1)/(K+1)$

で導入した。ここに K は extremal quasi-conformal mapping $g:\lambda\to\lambda'$ の maximal dilatation である。$g\in\alpha'\alpha^{-1}$ は自己同型と可換であるから $0,1,\infty$ を固定する Riemann 球の自分自身への写像で z_i を z_i' $(1\leq i\leq s)$ にうつす。そのとき，つぎの補題がある [1]。

(1.3.6) $\quad [g(\zeta),\zeta] \leq C\|\mu\|_\infty$.

ここに $[\zeta,\zeta']$ は ζ と ζ' の間の spherical distance を表わす。μ は $k=\|\mu\|_\infty$ をもつ1つの可測関数，C は k に依存しない1つの定数である。事実，g は $0,1,\infty$ を固定する唯1つの μ-等角写像である。(1.3.6) は関数 z_i の連続性を示す。

§2 超幾何微分方程式

2.1. §1でみたように，

(2.1.1) $\quad y^n = x^{m_1}(x-1)^{m_2}(x-z)^{m_3}, \quad n\nmid m_1+m_2+m_3$

で定義された Riemann 面 $R(z)$ の第1種微分は

(2.1.2) $\quad \omega = x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3}y^{-l}dx \quad (0<l\leq n-1,\ 0\leq k_1,k_2,k_3<n)$

という形で与えられる。そこで z を媒介変数とみなして，微分 ω を Fuchs 型の微分方程式と関係づけることができる。即ち

(2.1.3) $\quad \alpha = -(k_1+k_2+k_3)+l(m_1+m_2+m_3)n^{-1}-1,$

$\beta = -k_3 + l m_3 n^{-1}$, $\gamma = -(k_1 + k_3) + l(m_1 + m_3) n^{-1}$

とおくならば，(1.2.3) の関係式 (2), (3) から

(2.1.4) (i) $\beta - \gamma + 1 \geq n^{-1}$, $\gamma - \alpha \geq n^{-1}$, $1 - \beta \geq n^{-1}$, $\alpha \geq n^{-1}$,

(ii) $\alpha, \beta, \alpha - \gamma, \beta - \gamma$ は整数ではない。

これらの α, β, γ で微分方程式

(2.1.5) $$z(z-1)\frac{d^2 w}{dz^2} + [(\alpha+\beta+1)z - \gamma]\frac{dw}{dz} + \alpha\beta w = 0$$

を作る。そのとき解 $w(z)$ は

(2.1.6) $$w(z) = \int_g^h x^{\beta-\gamma}(x-1)^{\gamma-\alpha-1}(x-z)^{-\beta}\,dx$$

で与えられる。ここに，g, h は $0, 1, \infty$ の任意の2つである [7]。この解はつぎの形の積分（オ1種微分の積分）である：

(2.1.7) $$\int_g^h x^{k_1}(x-1)^{k_2}(x-z)^{k_3} y^{-l}\,dx .$$

逆につぎの条件の下で微分方程式 (2.1.5) を考える：

(2.1.8) (i) $\beta - \gamma + 1 > 0$, $\gamma - \alpha > 0$, $1 - \beta > 0$, $\alpha > 0$,

(ii) $\alpha, \beta, \alpha - \gamma, \beta - \gamma$ は整数ではない，

(iii) $\alpha = a n^{-1}$, $\beta = b n^{-1}$, $\gamma = c n^{-1}$; ここに n は素数で a, b, c は整数。

Gauss の記号を用いてつぎのように置く：

(2.1.9) $k_1 = [\beta - \gamma] + 1$, $k_2 = [\gamma - \alpha - 1] + 1$, $k_3 = [-\beta] + 1$.

$0 < t_i n^{-1} < 1$ であるような適当な t_i を選ぶならば，$k_1 - (\beta - \gamma) = t_1 n^{-1}$, $k_2 - (\gamma - \alpha - 1) = t_2 n^{-1}$, $k_3 - (-\beta) = t_3 n^{-1}$. l を t_1, t_2, t_3 の最大公約数とすると $1 \leqq m_i < n$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ である整数 m_i を用いて，

(2.1.10) $\quad k_1-(\beta-\gamma)=lm_1n^{-1},\ k_2-(\gamma-\alpha-1)=lm_2n^{-1},\ k_3-(-\beta)=lm_3n^{-1}$

ここから，$l(m_1+m_2+m_3)n^{-1}=k_1+k_2+k_3+1+\alpha$，そして，それゆえ $n\nmid(m_1+m_2+m_3)$。これらの m_1, m_2, m_3 と n とを用いて，z をパラメータとする Riemann 面の族 (2.1.1) を得る。そのとき，$\omega=x^{k_1-lm_1n^{-1}}(x-1)^{k_2-lm_2n^{-1}}(x-z)^{k_3-lm_3n^{-1}}dx$ は $R(z)$ の才1種微分となり，その積分 $\int_g^h\omega$ $(g,h=0,1,\infty)$ は与えられた微分方程式の解であることが容易にわかる。

さて，つぎの方程式によって定義された Riemann 面を考えよう。ここに n' は素数で，m_1', m_2', m_3' は n' より小なる整数：

(2.1.11) $\quad Y^{n'}=X^{m_1'}(X-1)^{m_2'}(X-z)^{m_3'},\quad n'\nmid m_1'+m_2'+m_3'$

その Riemann 面の才1種微分を

(2.1.12) $\quad \omega'=X^{k_1'}(X-1)^{k_2'}(X-z)^{k_3'}\quad (0<l'\leq n'-1,\ 0\leq k_1', k_2', k_3'\leq n'-1)$

と仮定する。さらに，z をパラメータと考えて積分 $\int_g^h\omega'$ $(g,h=0,1,\infty)$ が与えられた微分方程式 (2.1.5) の解であると仮定する。そのときは

(2.1.13) $\quad k_1'-l'm_1'n'^{-1}=\beta-\gamma=k_1-lm_1n^{-1}.$

ここから，$n=n'$ であること，また，$l'm_i'-lm_i\equiv 0 \pmod{n}$ がすべての $i\ (1\leqq i\leqq 3)$ に対して成立つことがわかる。ところで，$t'l'\equiv 1 \pmod{n}$ であるような整数 t' が存在するから，上式から $m_i'-t'lm_i\equiv 0 \pmod{n}$ がすべての $i\ (1\leqq i\leqq 3)$ に対して成立つ。$t'l=q$ とおく。そのときは Riemann 面 (2.1.11) は

$$Y^n = X^{m_1'}(X-1)^{m_2'}(X-z)^{m_3'} = \{X^{gm_1}(X-1)^{gm_2}(X-z)^{gm_3}\}\{X^{np_1}(X-1)^{np_2}(X-z)^{np_3}\}$$

と表わされる。ここに p_1, p_2, p_3 は整数。双有理変換 $X=\xi$, $Y=\eta\xi^{p_1}(\xi-1)^{p_2}(\xi-z)^{p_3}$ により (2.1.11) はつぎのようになる:

(2.1.14) $\quad \eta^n = \xi^{gm_1}(\xi-1)^{gm_2}(\xi-z)^{gm_3}$

さらに，双有理変換 $\xi = x$, $\eta^{a'}\xi^{m_1b'}(\xi-1)^{m_2b'}(\xi-z)^{m_3b'} = y$ によりこれは (2.1.1) に変換される。ここに a', b' は $a'g + b'n = 1$ であるような整数。従ってつぎの定理をうる:

(2.1.15) Theorem. 条件 (i), (ii), (iii) をもつ超幾何微分方程式 (2.1.5) を考える。そのとき，(2.1.1) で定義された Riemann 面の族 $\{R(z)\}$ がつぎのように存在する: z を媒介変数として，$R(z)$ の第1種微分 ω の積分 $\int_g^h \omega$ $(g, h = 0, 1, \infty)$ は (2.1.5) の解である。$R(z)$ は通常の意味での等角同値を除いて一意的に決まる。但し族 $\Omega(g', n, \{\nu_{ij}\})$ で考えるならば一意的にきまる。

2.2. さて，$1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 < 1$ を満足する正の整数 s_1, s_2, s_3 が存在して，微分方程式 (2.1.5) において，

(2.2.1) $\quad 1-\beta = (1/s_1 + 1/s_2 - 1/s_3 + 1)/2,$

$\quad 1+\beta-\gamma = (1/s_3 + 1/s_1 - 1/s_2 + 1)/2,$

$\quad \gamma-\alpha = (1/s_2 + 1/s_3 - 1/s_1 + 1)/2$

が成立つと仮定する。この意味については [7] を参照されたい。条件 (2.2.1) の下でわれわれの Riemann 面の方程式がどのようになるか調べよう。(2.2.1) から

(2.2.2) $k_3 - l m_3 n^{-1} = (1/s_1 + 1/s_2 - 1/s_3 - 1)/2$,

$k_1 - l m_1 n^{-1} = (1/s_3 + 1/s_1 - 1/s_2 - 1)/2$,

$k_2 - l m_2 n^{-1} = (1/s_2 + 1/s_3 - 1/s_1 - 1)/2$.

nは素数であるから簡単な計算により，$k_1 = k_2 = k_3$ そして $m_1 = m_2 = m_3$ を得る。ここで $s_1 = s_2 = s_3$ で $Y^n = X^m(X-1)^m(X-z)^m$ により定義された Riemann 面は $y^n = x(x-1)(x-z)$ により定義されたそれと等角同値であることに注意しなくてはならない。これらの Riemann 面から同じ微分方程式が得られることは明らかである。

2.3. §1 でみたように方程式

(2.3.1) $y^n = x^{m_0}(x-z_1)^{m_1} \cdots (x-z_s)^{m_s}(x-1)^{m_{s+1}}$, $n \nmid m_0 + m_1 + \cdots + m_{s+1}$

で定義された Riemann 面 $R(z)$ の第1種微分 ω は

(2.3.2) $\omega = x^{k_0}(x-z_1)^{k_1} \cdots (x-z_s)^{k_s}(x-1)^{k_{s+1}} y^{-l} dx \quad (0 < l \leq n-1,\ 0 \leq k_i < n)$

の形で与えられる。$z_1, \ldots, z_s$ を独立な変数とみなすとき，2.1 と 2.2 で用いたと全く同様に Appell 型の偏微分方程式に (2.3.2) を関係付けすることができる。即ち，

(2.3.3) $\alpha = -\sum_{i=0}^{s+1} k_i + l(\sum_{i=0}^{s+1} m_i)n^{-1} - 1$,

$\beta_i = -k_i + l m_i n^{-1} \quad (1 \leq i \leq s)$,

$\gamma = -\sum_{i=0}^{s} k_i + l(\sum_{i=0}^{s} m_i)n^{-1}$

とおくならば，(1.2.3) における (2), (3) によりつぎの条件：

(2.3.4) (i) $\sum_{i=1}^{s} \beta_i - \gamma + 1 \geq n^{-1}$, $\gamma - \alpha \geq n^{-1}$, $(1-\beta_i) \geq n^{-1} (1 \leq i \leq s)$, $\alpha \geq n^{-1}$,

(ii) α, β_i $(1 \leq i \leq s)$, $\gamma - \alpha$, $\gamma - \sum_{i=1}^{s} \beta_i$ は整数でない

をうる。これらの $\alpha, \beta_i\ (1 \le i \le s), \gamma$ によってつぎのような偏微分方程式をつくることができる [2: pp. 117—120]:

$$(2.3.5)\qquad A_i \frac{\partial^2 w}{\partial z_i^2} + \sum_{j=1}^{s} B_j^{(i)} \frac{\partial w}{\partial z_j} + C_i w = 0 \qquad (1 \le i \le s),$$

$$(z_i - z_j)\frac{\partial^2 w}{\partial z_i \partial z_j} - \beta_j \frac{\partial w}{\partial z_i} + \beta_i \frac{\partial w}{\partial z_j} = 0 \qquad (i \neq j).$$

ここに、$A_i = z_i(z_i - 1)$, $C_i = \alpha \beta_i$ そして $B_j^{(i)} = -\beta_i \dfrac{z_j(z_j-1)}{z_i - z_j}$ $(i \neq j)$,

$$B_i^{(i)} = z_i(z_i-1) \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \le j \le s}} \frac{\beta_j}{z_i - z_j} - \left(\gamma - \sum_{i=1}^{s} \beta_i\right) - \beta_i + \left[\alpha - \left(\sum_{i=1}^{s} \beta_i\right) + 2\beta_i + 1\right] z_i.$$

そのとき，解 $w(z_1, \cdots, z_s)$ は積分

$$(2.3.6)\qquad w(z_1, \cdots, z_s) = \int_g^h x^{\beta_1 + \cdots + \beta_s - \gamma}(x - z_1)^{-\beta_1} \cdots (x - z_s)^{-\beta_s}(x-1)^{\gamma - \alpha - 1}\, dx$$

で与えられる。ここに g, h は $0, 1, z_1, \cdots, z_s, \infty$ のうちの任意の2つとする。

逆に，つぎの条件をもつ Appell 型の微分方程式を考える:

(2.3.7) (i) $\sum_{i=1}^{s} \beta_i - \gamma + 1 > 0$, $\gamma - \alpha > 0$, $1 - \beta_i > 0\ (1 \le i \le s)$, $\alpha > 0$.

(ii) $\alpha, \beta_i\ (1 \le i \le s), \gamma - \alpha, \gamma - \sum_{i=1}^{s} \beta_i$ は整数ではない。

(iii) $\alpha = an^{-1}$, $\beta_i = b_i n^{-1}\ (1 \le i \le s)$, $\gamma = cn^{-1}$; ここに n は素数で $b_i\ (1 \le i \le s), a, c$ は整数である。

そのとき，$n \nmid (m_0 + m_1 + \cdots + m_{s+1})$ であるような正の整数 $m_0, \cdots, m_{s+1}$ と $k_0, \cdots, k_{s+1}$ を得る。そしてこれらを用いて，Riemann 面 $R(z)$ の族 $\{R(z)\}$ を得る: $y^n = x^{m_0}(x - z_1)^{m_1} \cdots (x - z_s)^{m_s}(x-1)^{m_{s+1}}$. また，$R(z)$ の第1種微分 ω を積分 $\int_g^h \omega$ $(g, h = 0, 1, z_1, \cdots, z_s, \infty)$ が微分方程式 (2.3.5) の解であるように作ることができる。$R(z)$ は通常の意味で等角同値を除いて一意的に定まる。

§3 Riemann 面の周期

3.1 Shimura の若干の結果[9,10]を想起しよう。$\mathbb{Q}$ を有理数体。$K=\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta=\exp(2\pi i/n)$ とする。ここに n は素数と仮定する。明らかに，$[K:\mathbb{Q}]=n-1$. $2h=n-1$ とおく。ρ を complex conjugation とする。Φ を $g\times g$ 次の複素行列による K の表現とする。triple $(A,\mathcal{C},\theta)$ はつぎの条件が満足される場合，type (K,Φ,ρ) の偏極 Abel 多様体であるという：

(3.1.1) (i) A は複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された g 次元 Abel 多様体。

(ii) θ は K から $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ の中への1つの同型で，$\theta(x)$, $x\in K$ の A の解析的座標系による表示は $\Phi(x)$ に同値。

(iii) $\mathcal{C}$ を A の1つの偏極とする．$\mathcal{C}$ によって定まる $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ の involution が $\theta(K)$ 上で $\theta(x)\mapsto\theta(x^\rho)$ と一致する。

$\mathcal{P}=(A,\mathcal{C},\theta)$ を type (K,Φ,ρ) とする。A に同型である1つの torus $\mathbb{C}^g/D$ をとる。ここに D は $\mathbb{C}^g$ における1つの lattice である。$\mathbb{C}^g$ の座標系をすべての $x\in K$ に対して，$\theta(x)$ は行列 $\Phi(x)$ によって表示されるように選ぶ。$u=g/h$ 個のベクトル $\gamma_1,\cdots,\gamma_u$ を $\mathbb{Q}D=K\gamma_1+\cdots+K\gamma_u$ であるようにとることができる。すべての $a=(a_1,\cdots,a_u)\in K^u$ に対して，$\gamma(a)=\Phi(a_1)\gamma_1+\cdots+\Phi(a_u)\gamma_u$ とおく。そのとき，写像 $a\mapsto\gamma(a)$ は K^u から $\mathbb{Q}D$ の上への同型写像である。M をこの写像による D の逆像とする。$E(\gamma,\delta)$ を $\mathbb{C}^g/D$ 上の退化しない Riemann form で $\mathcal{C}$

における basic polar divisor に対応するものとする。$E(\Phi(a)\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j) = tr(at_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq s+1)$ であるような元 $t_{ij} \in K$ が存在する。$T = (t_{ij})$ とおく。$\sigma_1, \cdots, \sigma_n, \sigma_1\rho, \cdots, \sigma_n\rho$ を K から $\mathbb{C}$ の中へのすべての同型とする。r_μ (resp. s_μ) を σ_μ (resp. $\sigma_\mu\rho$) の Φ における多重度とする。type(K, Φ, ρ) の $\mathcal{P} = (A, \mathcal{C}, \theta)$ の存在を保証するためには条件 $2g = (n-1)(r_\mu + s_\mu)$ $(1 \leqq \mu \leqq n)$ が必要である。H_μ を r_μ 行, s_μ 列の複素行列 Z_μ で $1 - Z_\mu{}^t Z_\mu > 0$ であるもの全体の作る空間とする。$H = H_1 \times \cdots \times H_n$ とおく。$\dim H = \sum_{\mu=1}^{s} r_\mu s_\mu$。$T$ と M を固定するとき, H の点によって parametrize された type(K, Φ, ρ) の $\mathcal{P} = (A, \mathcal{C}, \theta)$ の解析的族をうる。この解析的族を Σ で表わし, $\mathfrak{z} \in H$ により定められる Σ の元を $\mathcal{P}_\mathfrak{z}$ で表わす。H 上の変換からなる不連続群 G が存在する。Σ の2つの元 $\mathcal{P}_\mathfrak{z}$, $\mathcal{P}_{\mathfrak{z}'}$ は $\mathfrak{z} = U(\mathfrak{z}')$, ${}^\exists U \in G$ であるときそのときに限り同型となる。Σ の元の同値類の集合は H/G と1対1の対応をなす。

3.2. $\Omega(g', n, \{\nu_i\})$ を 1.1 で定義された Riemann 面の族とする。$g' = 0$ ならば Ω の各元は $\langle R, \sigma \rangle$ で, R の方程式は (1.2.2) により与えられる。Ω のすべての元を用いて, $\Gamma(R_0, \sigma_0)$ を得る。この Γ の上に一般化された Teichmüller 空間 Λ をつくる。さらに, $R(z)$ のベクトル空間 V の1つの基底は Lemma (1.2.3) で与えられる。従って, σ の表現 $\Phi(\sigma)$ は

$$(3.2.1) \qquad \Phi(\sigma) = \begin{pmatrix} \zeta^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta^{\alpha_g} \end{pmatrix} \qquad (\alpha_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq g)$$

$\Phi(\sigma)$ を $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ の表現 $\Phi(\zeta)$ と一致させることができる。

Riemann面 R の $\mathbb{Q}$ 係数の homology 群を $H_1(R,\mathbb{Q})$ とする。R の自己同型 σ により自然に誘導される $H_1(R,\mathbb{Q})$ の endomorphism を $\Phi_*(\sigma)$ とする。そのとき $\Phi_*(a)$ $(a=a_0+a_1\zeta+\cdots+a_{n-2}\zeta^{n-2},\ a_0,\cdots,a_{n-2}\in\mathbb{Q})$ を

(3.2.2) $\quad \Phi_*(a)=a_0+a_1\Phi_*(\sigma)+\cdots+a_{n-2}\Phi_*(\sigma)^{n-2}$

で定義する。そのとき，$\Phi_*(a)$ は $H_1(R,\mathbb{Q})$ に作用する。$H_1(R,\mathbb{Q})$ は $\Phi_*(K)$ 上の vector 空間とみなすことができる。一方，Riemann-Hurwitz の公式により $2g=(n-1)(s+1)$。従って，$s+1$ 個のベクトル $Z_1,\cdots,Z_{s+1}$ が

(3.2.3) $\quad H_1(R,\mathbb{Q})=\Phi_*(K)Z_1+\cdots+\Phi_*(K)Z_{s+1}$

であるように存在する。$H_1(R,\mathbb{Q})$ の K 上の 1 つの基底を具体的に表示しよう。x_0 を $0, z_1,\cdots,z_s, 1, \infty$ と異なる x 球面上の任意の 1 点とする。x_0 とこれらの点を x_0 以外では共通点を持たない曲線によって結ぶ。それらの曲線をそれぞれ順に $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{s+1},\alpha_{s+2}$ で表わす。Riemann面 R 上の 1 点 $P_0=(x_0,y_0)$ を固定し，P_0 から出発し道 α_i に対応する R 上の道を $\tilde{\alpha}_i$ で表わす。道 α_i に沿って x の代数関数の 1 つの枝 y を解析接続すると $\zeta^{m_i}y$ となることから，$\tilde{\alpha}_i$ の終点は $(x_0,\zeta^{m_i}y_0)=\sigma^{m_i}(x_0,y_0)$ となる。次の様におく：

(3.2.4) (i) $C_i=\tilde{\alpha}_i+\sigma^{m_i}\tilde{\alpha}_i+\cdots+\sigma^{m_i(\nu_i-1)}\tilde{\alpha}_i$ $(0<i\le s+2)$, (ii) $Z_j=C_{j-1}-C_j$ $(1\le j\le s+1)$.

そのときは C_j は R 上 P_0 と $(x_0,\zeta y_0)$ を結ぶ曲線で，Z_j は閉曲線。$Z_1,\cdots,Z_{s+1}$ は $K=\mathbb{Q}(\zeta)$ 上の 1 つの基底で，$Z_1,\sigma Z_1,\cdots,\sigma^{n-2}Z_1;\cdots;Z_{s+1},\sigma Z_{s+1},\cdots,\sigma^{n-2}Z_{s+1}$ は整数環 $\mathbb{Z}$ 上の 1 つの基底であることがわかる。

3.3. $\Omega(g',n,\{\nu_i\})$ の元 $\langle R,\sigma\rangle$ に対応する，H の点を $\mathfrak{z}$ とする。

[9]により (R,σ) と (R',σ') が同型であるときそのときに限り $\mathcal{S}_g$ と $\mathcal{S}_{g'}$ は同型である。即ち，Γ から H/G の中への injection がある。

$\mathbb{C}^s$ の1点 $z=(z_1,\cdots,z_s)$ をとる。ここに，$z_1,\cdots,z_s$，0，1 は互いに相異なる複素数とする。このような $\mathbb{C}^s$ の点の集合を $\dot{\mathbb{C}}^s$ で表わす。$z=(z_1,\cdots,z_s)\in\dot{\mathbb{C}}^s$ を任意にとる。z に $\Gamma(R_0,\sigma_0)$ の点 (R,σ) を

(3.3.1) $\quad y^n = x^{m_0}(x-z_1)^{m_1}\cdots(x-z_s)^{m_s}(x-1)^{m_{s+1}}, \quad n \nmid m_0+\cdots+m_{s+1}$

により対応させる。(1.3.2)により定義された $\langle R_0,\sigma_0\rangle$ から (3.3.1) により定義された $\langle R,\sigma\rangle$ への extremal quasiconformal mapping が存在する[5]。それ故少くとも1つの $\lambda\in\Lambda(R_0,\sigma_0)$ が λ の方程式が (3.3.1) であるように存在し，$\Lambda(R_0,\sigma_0)$ から $\dot{\mathbb{C}}^s$ への surjective map Ω が存在する。$\dot{\mathbb{C}}^s$ の点 z をとる。$z'=(z_1',\cdots,z_s')$ を $\dot{\mathbb{C}}^s$ の z の近傍内の1点とする。この z' で (1.2.2) により定義された Riemann面を$R(z')$とする。$R(z')$ の $V(z')$ の1つの基底 $\{\omega_1,\cdots,\omega_g\}$ をとることができる。そのおのおのは (1.2.3) の形の微分である。ベクトル

(3.3.2) $\quad {}^t\mathscr{C}_i(z') = \left(\int_{Z_i}\omega_1, \cdots, \int_{Z_i}\omega_g\right) \quad (1\le i\le s+1)$

を考える。ここに Z_i は z の近傍において constant ととることができる。それ故，$\mathscr{C}_i(z')$ はその近傍で正則である。[5]におけると全く同様にしてつぎの補題を得る：

(3.3.3) *Lemma.* z の十分小さな近傍の1点 z' に対する data を $\{\mathscr{C}_1(z'),\cdots,\mathscr{C}_{s+1}(z');M(z'),T(z')\}$ とする。そのときは $M(z')$, $T(z')$ はその近傍で constants である。

この補題により $\mathfrak{z}'$ の各座標は z の近傍で正則であることがわかる。$F(z')=(F_1(z'),\cdots,F_N(z'))$ によって $\mathfrak{z}'$ の座標を表わす。ここに $N=\dim H$ で H は一般化された Teichmüller 空間 $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ に対応する対称領域。G を 3.1 で述べた不連続群とするとき，つぎの補題がある [5]：

(3.3.4) *Lemma.* $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ から H の中への holomorphic mapping $w(\lambda)$ が存在し，それは G-invariant である。

さて，H の点 $\mathfrak{z}$ に対して $\mathfrak{z}$ に対応する Λ の点 λ が存在する。$\mathfrak{z}'$ の座標を $(\mathfrak{z}'_1,\cdots,\mathfrak{z}'_N)$ と表わすならば，λ の近傍において，$\mathfrak{z}'_1,\cdots,\mathfrak{z}'_N$ は λ' の正則関数である。つぎの関係式

(3.3.5) $\quad \mathfrak{z}'_1(\lambda')=F_1(z'),\ \cdots,\ \mathfrak{z}'_N(\lambda')=F_N(z')$

が λ の近傍 $U(\lambda)$ と z の近傍 $W(z)$ において成り立つ。ここに，われわれは任意の $\lambda'\in U(\lambda)$ に対して $z'(\lambda')\in W(z)$ とする。Diagram

(3.3.6)
$$\begin{array}{ccccc} & \overset{z}{\swarrow} & \Lambda(R_0,\sigma_0) & \xrightarrow{w} & H \\ \dot{\mathbb{C}}^A & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ & \overset{\pi}{\searrow} & \Gamma(R_0,\sigma_0) & \xrightarrow{\mu} & H/G \end{array}$$

において，$\Gamma(R_0,\sigma_0)$ における複素構造を $\dot{\mathbb{C}}^A$ から自然に与える。そして写像 μ は連続な injection である [10]．さらに写像 μ はつぎのように考えられる．$\Gamma(R_0,\sigma_0)$ の点 $\langle R,\sigma\rangle$ とその点の近傍をとる。そのとき，$\pi_2 F \pi^{-1}$ はその近傍で well-defined で μ と一致する。ここに F は $\dot{\mathbb{C}}^A$ から H の中への (3.3.5) で定まる写像。$\Gamma(R_0,\sigma_0)$ は normal analytic space で μ は連続だから，Riemann の定理

[4]により μ は正則である。$\mathfrak{z}$ と $\pi_1\ (=\pi\mathfrak{z})$ が連続であることに注意する。さて, $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ の任意の1点 λ をとる。$\pi_1(\lambda)\in\Gamma(R_0,\sigma_0)$ を考える。μ は holomorphic injection であるから $\Gamma(R_0,\sigma_0)$ における近傍 $W(\pi_1(\lambda))$ と H/G における $\mu(\pi_1(\lambda))$ の近傍 V とがあって, μ の $W(\pi_1(\lambda))$ への制限は1つの proper mapping である。即ち, $\mu(W(\pi_1(\lambda)))$ は V における analytic set である [8]. A を $\mu(W(\pi_1(\lambda)))$ における singular locus とする。そこで, $w^{-1}\pi_2^{-1}(V)$ における集合 $w^{-1}\pi_2^{-1}(A)$ を考える。適当な近傍 $U_0(\lambda)$ において $\dim(w^{-1}\pi_2^{-1}(A)\cap U_0(\lambda))$ は $\dim U_0(\lambda)$ より低い。事実, $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ は $\Gamma(R_0,\sigma_0)$ の1つの covering であるから $\pi_2 w(U_0(\lambda))$ が集合 A に含まれてしまうことはない。ところで, π_1 は $U_0(\lambda)-w^{-1}\pi_2^{-1}(A)$ で正則, $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ で連続である。従って, π_1 は $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ から $\Gamma(R_0,\sigma_0)$ の上への1つの holomorphic covering である。π は $\dot{\mathbb{C}}^{\Delta}$ から $\Gamma(R_0,\sigma_0)$ の上への1つの holomorphic covering で $\mathfrak{z}$ は $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ から $\dot{\mathbb{C}}^{\Delta}$ の上への1つの continuous mapping であることは既知。上記と同じ推論により

(3.3.7) **Theorem.** (1.2.2) におけるパラメータ $z_1,\cdots,z_\Delta$ は $\Omega(g',n,\{\nu_i\})$ から作られた一般化された Teichmüller space $\Lambda(R_0,\sigma_0)$ において一価正則な関数である。

3.4. 公式 (3.3.5) は $y^2=x(x-1)(x-z)$, $z\in\mathbb{C}-\{0,1\}$ の場合における公式 $\tau=w_1(z)/w_2(z)$, $\mathrm{Im}\,\tau>0$ の1つの拡張であることに注意すべきである。

§4 Theta constants によるパラメータの表示

4.1. 記号の説明もかねてTheta関数に関し簡単な説明をする。Rを種数 g の Riemann 面, A_k, B_k $(1 \le k \le g)$ をRの1つの標準的な dissection とする。P_0 をすべての A_k, B_k $(1 \le k \le g)$ の共通点とする。点 P_0 はまた積分に対する initial point である。$dw_1, \cdots, dw_g$ をRの第1種微分の作るベクトル空間の1つの基底で，$d\mathfrak{w}$ をベクトル $(dw_1, \cdots, dw_g)$ とする。

(4.1.1) $\quad w_\ell(p) = \int_{P_0}^{p} dw_\ell \quad (1 \le \ell \le g), \quad \mathfrak{w}(p) = \int_{P_0}^{p} d\mathfrak{w}$

とする。ここに p はR上の動点で積分路は標準分割された Riemann 面 R^* 上で選ばれる。この基底で周期行列が $[E, Z]$ と表わされると仮定する。ここに E は g 次の単位行列で，$Z = X + iY$ は Riemann の関係式を満足する：

(4.1.2) $\quad X = {}^tX, \quad Y = {}^tY \quad$ そして $\quad Y > 0$。

Z でもって作られる Theta 関数は

(4.1.3) $\quad \theta(\mathfrak{r}) = \theta(\mathfrak{r}, Z) = \sum_{\mathfrak{n}} \exp(\pi i\, {}^t\mathfrak{n} Z \mathfrak{n} + 2\pi i\, {}^t\mathfrak{n}\mathfrak{r})$

で定義され，$\theta(\mathfrak{r})$ はつぎの関数関係を満たす：

(4.1.4) $\quad \theta(\mathfrak{r} + \mathfrak{g} + Z\mathfrak{h}) = \theta(\mathfrak{r}) \exp(-i\pi\, {}^t\mathfrak{h} Z \mathfrak{h} - 2\pi i\, {}^t\mathfrak{h}\mathfrak{r})$

ここに，${}^t\mathfrak{g} = (g_1, \cdots, g_g)$，${}^t\mathfrak{h} = (h_1, \cdots, h_g)$ は任意の整数ベクトル。$f(p) = \theta(\mathfrak{w}(p) - \mathfrak{s})$ とおく。ここに ${}^t\mathfrak{w}(p) = (w_1(p), \cdots, w_g(p))$ で ${}^t\mathfrak{s} = (s_1, \cdots, s_g)$ は複素数ベクトル。R上の閉曲線に沿って p をひ

とまわりさせるとき，$\mathfrak{w}(\mathfrak{p})-\mathfrak{r}$ は量 $\mathfrak{g}+Z\mathfrak{h}$ だけ変化する。そして $f(\mathfrak{p})$ は $\exp(-i\pi{}^t\mathfrak{h}Z\mathfrak{h}-2\pi i{}^t\mathfrak{h}(\mathfrak{w}(\mathfrak{p})-\mathfrak{r}))$ だけ乗ぜられる。$\mathfrak{r}$ を1つ固定するとき，$f(\mathfrak{p})$ は恒等的に零でないならば，ちょうど g 個の零点を R 上にもつ。$\mathfrak{c}$ を g 個の量

(4.1.5)　$$c_k=\sum_{l=1}^{g}\int_{A_l}w_k(\mathfrak{p})\,dw_l-\frac{1}{2}z_{kk}\qquad(1\leqq k\leqq g)$$

からなるベクトルとする。$\mathfrak{r}$ を $f(\mathfrak{p})=\theta(\mathfrak{w}(\mathfrak{p})-\mathfrak{r}+\mathfrak{c})$ が $\mathfrak{p}$ に関し恒等的には零でないように選ぶならば，その g 個の zeros $\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_g$ は合同式を満足する：

(4.1.6)　$$\sum_{l=1}^{g}\mathfrak{w}(\mathfrak{q}_l)\equiv\mathfrak{r}.$$

$\theta(\mathfrak{w}(\mathfrak{p})-\mathfrak{r}+\mathfrak{c})$ が $\mathfrak{p}$ に関して恒等的には零とならないための必十条件はベクトル $\mathfrak{r}$ に関する逆問題が1意的に解かれる，即ち，(4.1.6) がただ1つの解 $\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_g$ をもつことである。このとき因子 $D=\mathfrak{q}_1+\cdots+\mathfrak{q}_g$ は general である。一般に，整因子 $D=\mathfrak{p}_1+\cdots+\mathfrak{p}_m$ が general であるとは性質：$\operatorname{div}(f)+D>0$ をもつ R 上の定数でない有理型関数が存在しない場合をいう。

4.2. さて，次の補題はわれわれの研究に対して重要である[11]。

(4.2.1) *Lemma.* $f(\mathfrak{p})$ を零点 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_m$ と極 $\mathfrak{b}_1,\cdots,\mathfrak{b}_m$ をもつ R 上の meromorph な関数とする。degree $g-1$ の general divisor $D=\mathfrak{x}_1+\cdots+\mathfrak{x}_{g-1}$ において $\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_{g-1}$ を $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_m$；$\mathfrak{b}_1,\cdots,\mathfrak{b}_m$ と異なるように選ぶ。そのときは，積分路を適当に選ぶとき，(i) $\sum_{k=1}^{m}\mathfrak{w}(\mathfrak{a}_k)=\sum_{k=1}^{m}\mathfrak{w}(\mathfrak{b}_k)$ であって，$\mathfrak{y}$ を $\mathfrak{p}$ に独立な量，$\mathfrak{c}$ を (4.1.4) で定めた量とする時，

(ii) $$f(\mathfrak{p}) = \eta \prod_{k=1}^{m} \frac{\theta\left(w(\mathfrak{p}) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(a_k) - \Sigma\right)}{\theta\left(w(\mathfrak{p}) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(b_k) - \Sigma\right)}.$$

(4.2.1) を R 上の meromorphic function

(4.2.2) $$f(\mathfrak{p}) = 1 - x(\mathfrak{p}), \quad \mathfrak{p} = (x, y)$$

に適用する。x-球面上の点 $0, z_1, \cdots, z_s, 1, \infty$ 上にある R 上の点をそれぞれ $\mathfrak{q}_0, \mathfrak{q}_{z_1}, \cdots, \mathfrak{q}_{z_s}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_\infty$ とする。そのときは $f(\mathfrak{p})$ の零点は n 個の点 $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_1$ で $f(\mathfrak{p})$ の極は n 個の点 $\mathfrak{q}_\infty, \cdots, \mathfrak{q}_\infty$ である。それ故，

(4.2.3) $$f(\mathfrak{q}_0) = \eta \prod^{n} \frac{\theta\left(w(\mathfrak{q}_0) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_1) - \Sigma\right)}{\theta\left(w(\mathfrak{q}_0) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_\infty) - \Sigma\right)}$$

(4.2.4) $$f(\mathfrak{q}_{z_i}) = \eta \prod^{n} \frac{\theta\left(w(\mathfrak{q}_{z_i}) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_1) - \Sigma\right)}{\theta\left(w(\mathfrak{q}_{z_i}) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_\infty) - \Sigma\right)}$$

従って，つぎの公式を得る：

(4.2.5) $$1 - z_i = \prod^{n} \frac{\theta\left(w(\mathfrak{q}_{z_i}) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_1) - \Sigma\right)}{\theta\left(w(\mathfrak{q}_{z_i}) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_\infty) - \Sigma\right)} \prod^{n} \frac{\theta\left(w(\mathfrak{q}_0) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_\infty) - \Sigma\right)}{\theta\left(w(\mathfrak{q}_0) + \sum_{\ell=1}^{g-1} w(\varkappa_\ell) - w(\mathfrak{q}_1) - \Sigma\right)}.$$

ところで，R 上の第1種微分の1つの基底

(4.2.6) $$p_1(\zeta, \lambda)\,d\zeta, \ \cdots, \ p_g(\zeta, \lambda)\,d\zeta$$

と1つの標準 homology 基底

(4.2.7) $$A_1(\zeta, \lambda), \cdots, A_g(\zeta, \lambda); \ B_1(\zeta, \lambda), \cdots, B_g(\zeta, \lambda)$$

が

(4.2.8) $$\int_{\zeta}^{A_i(\zeta,\lambda)} p_j(\zeta, \lambda)\,d\zeta = \delta_{ij}, \quad \int_{\zeta}^{B_i(\zeta,\lambda)} p_j(\zeta, \lambda)\,d\zeta = Z_{ij}(\lambda)$$

であるように存在する。ここに $p_j(\zeta, \lambda)$ そして $A_j(\zeta, \lambda)$, $B_j(\zeta, \lambda)$ $(1 \leq j \leq g)$ は Bounded Jordan domain $D(\lambda)$ で任意に固定された ζ に対し λ の正則

関数である〔3〕。(4.2.6), (4.2.7) の下で (4.2.5) を考察する。まず, c は (4.1.5) により λ に関して holomorph. 才2 に各 j に対して,

(4.2.9) $w_j(q_{z_i}) - w_j(q_1) = \int_{q_1}^{q_{z_i}} p_j(\zeta,\lambda)\,d\zeta, \quad w_j(q_0) - w_j(q_\infty) = \int_{q_\infty}^{q_0} p_j(\zeta,\lambda)\,d\zeta$

をうる。これらは λ_0 の近傍で定数係数である $A_1(\zeta,\lambda), \cdots, B_g(\zeta,\lambda)$ の1次結合で表わされる閉曲線に沿う半周期であるから, λ に関して holomorph. 才3 に ${}^t\mathfrak{p}(\zeta,\lambda) = (p_1(\zeta,\lambda), \cdots, p_g(\zeta,\lambda))$ とおく。そのとき, generl divisor $D = x_1 + \cdots + x_{g-1}$ を

(4.2.10) $\mathfrak{w}(x_l) = \int_{p_0}^{x_l} \mathfrak{p}(\zeta,\lambda)\,d\zeta \qquad (1 \leq l \leq g-1)$

が λ_0 の近傍で λ に関して holomorph であるようにとることができる。事実, $\tilde{D} = x_1 + \cdots + x_{g-1} + x_g$ が general ならば, $D = x_1 + \cdots + x_{g-1}$ は general。そこで $x_1, \cdots, x_{g-1}, x_g$ を Riemann 面上の相異なる g 個の点とする。$\tilde{D}$ が general であるための必十条件は行列式 $(p_i(\zeta_j,\lambda))$ が零にならないことである。ここに, $\zeta_1, \cdots, \zeta_g$ は $x_1, \cdots, x_g$ の $D(\lambda)$ における座標である。そのとき, $\det(p_i(\zeta_j,\lambda))$ は $\zeta_1, \cdots, \zeta_g, \lambda_1, \cdots, \lambda_s$ に関して holomorph. ここに $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_s)$。それ故, もしこの関数が $\mathfrak{X}_0 = (\zeta_1^{(0)}, \cdots, \lambda_s^{(0)})$ で 0 にならないならば, $\mathfrak{X}_0$ の近傍のすべての点 $\mathfrak{X} = (\zeta_1, \cdots, \lambda_s)$ で 0 にならない。ここからわれわれの主張は明らかである。以上を綜合して,

(4.2.) Theorem. (3.3.7) において得られた1価正則な関数は (4.2.6) の形で表わされる。

(4.2.11) は Lambda 関数の Theta constants による表示の拡張

であるということができる。

参考文献

[1] L.V. Ahlfors-L.Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics. Ann. of Math., vol. 72 (1960), 385-404.

[2] P. Appell, Fonctions hypergéometriques et hypersphériques. Gautier-Villars, 1926.

[3] L. Bers, Holomorphic differentials as functions of moduli, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 67 (1961), 206-210.

[4] H. Grauert-R. Remmert, Komplexe Räume. Math. Ann. Bd. 136 (1958), 245-318.

[5] A. Kuribayashi, On analytic families of compact Riemann surfaces with non-trivial automorphisms. Nagoya J., vol. 28 (1966), 119-165.

[6] A. Kuribayashi, Covering Riemann surfaces and Theta functions. Bull. Facul. Sci. & Eng. Chuo Univ., vol. 15 (1972), 1-13.

[7] E. Picard, Traité d'analyse II, III, Gautier-Villars, 1925.

[8] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen Komplexer Räume. Math. Ann. Bd. 133 (1957), 328-370.

[9] G. Shimura, On analytic families of polarized abelian varieties, Ann. of Math., vol 78 (1963), 149-192.

[10] G. Shimura, On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables. Osaka J. Math., vol. 1 (1964), 1-14.

[11] C.L. Siegel, Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie, II, Göttingen, 1954.