数理解析研究所講究録
273巻 1976年 151-163

複素射影空間上の有理微分形式のなす複体について

東大 理 寺尾宏明

§1.

Xをn次元複素非特異多様体、DをXのreduced divisorとする。そのとき、

記号(1.1): 非負整数k, qに対して、Xの各点xで、

$$\Omega^q(kD)_x = \{\omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x;\ Q^k\omega \text{が正則}\},$$

$$\Omega^q(\log kD)_x = \{\omega \in \text{germs of rational } q\text{-forms at } x;\ Q^k\omega \text{と } Q^k d\omega \text{がともに正則}\}$$

が定義される。ただし、ここで、Qは点xの近傍でのDの定義方程式のひとつであり、上記の定義は、Qの選択に依らない。そして、k, qのどちらか少なくとも一方が負の整数のときは、$\Omega^q(kD)_x = \Omega^q(\log kD)_x = 0$と、定義する。

そして、X上の~~解析~~解析的連接層

$$\Omega^q(kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(kD)_x$$

$$\Omega^q(\log kD) = \bigcup_{x \in X} \Omega^q(\log kD)_x$$

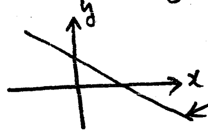
が、定義されて、各々、Dに沿って、高々k位の極をもつq-形式の芽のなす層とかDに沿って、高々対数的k位の極をもつq-形式の芽のなす層とかいう。

注意(1.2)：この定義は、Dが正規交叉のときは、k=1のときのP. Deligneの定義と一致するが、Dが一般の因子のときは、斎藤恭司によって（k=1）導入された。そして、$\Omega^1(\log D)_x$ を考えると、これは、$\mathcal{O}_x$-加群だが、Dがxで正規交叉でない場合は、自由$\mathcal{O}_x$-加群になるかどうかはわからない。そして、斎藤は、$\Omega^1(\log D)_x$ が$\mathcal{O}_x$-自由になることと、xのある近傍Uがあって、$U\cap(U\setminus D)$ が$K(\pi,1)$ になることとは、同値ではないかと予想した。この予想は、間違っていたともきくが、詳しいことは知らない。しかし、これはなかなか面白い予想だと思う。これに、関連して、次のことが成立する。

命題(1.3)：$(D,0)$ を$(\mathbb{C}^3,0)$ に於ける、reduced divisorの芽とする。そのとき、

$\Omega^1(\log D)_0$ が自由$\mathcal{O}_0$-加群 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ Dの特異点のなすスキームは、1次元Cohen-Macaulayスキーム

例えば、$\mathbb{C}^2\setminus\{lines\}$ の $K(\pi,1)$ について考えたいときには、$\mathbb{P}^2\setminus\{$無限の位置のline$\}\setminus\{lines\}$としておいて、結局、$(\mathbb{C}^3,0)$ 内のlinesのgermsの場合に持ちこめる。

例(1.4): $\mathbb{C}^2\setminus\Big\{$ 

$\Big\}$ というようなと
(a, b, cのうち、ふたつはゼロでない)
きは、$Q=xyz(ax+by+cz)$ としておいて、$D=\{Q=0\}$の特異点のなすスキームに対応するイデヤルIは、

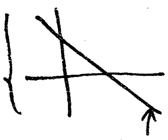
$$I=\{yz(2ax+by+cz),\ zx(ax+2by+cz),\ xy(ax+by+2cz)\}$$

であり、height $I=2$ であって、$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}/I$ がCohen-Macaulayになることと、Iの素因子の高さがすべて2に等しいことは、同値だが、それは、$I:(x,y,z)=I$ と同値。

簡単な計算から、

$I:(x,y,z)=I \iff$ a, b, cのうち、どちかひとつが0.

がわかる。これは、

$\mathbb{C}^2\setminus\Big\{$ 

$\Big\}$がK(π,1) $\iff$ a, b, cのうち、どれかひとつが0.

なる事実と対応していると思えるかもしれない。

また、

命題(1.5): $(D_1,0)\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,0)$, $(D_2,0)\hookrightarrow(\mathbb{C}^m,0)$
を、divisorsのgermsとするとき、(ともに、quasi-homogeneousとする)

$(D = D_1 \times \mathbb{C}^m \cup \mathbb{C}^n \times D_2,\ 0\times 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, 0)$ も divisor の germ になるが、$\Omega^1(\log D)_{0\times 0}$, $\Omega^1(\log D_1)_0$, $\Omega^1(\log D_2)_0$ のうちのふたつが free なら、他のひとつも free である。

この結果は、$K(\pi,1)$ の filtration type の判定法に対応していると思えるだろう。

いずれにせよ、少なくとも、$\mathbb{C}^2 - \{\text{lines}\}$ の場合に、$\Omega^1(\log D)$ が free になるのは、どのような configuration で起こりうるのかという問題は（スキーム的な意味は、(1.3) で云われているが…）、topology との関係がつくにせよつかないにせよ、多少は面白いかと思う。

<u>記号(1.6)</u>:
$$A_k^q := \Gamma(X, \Omega^q(kD)),$$
$$B_k^q := \Gamma(X, \Omega^q(\log kD)),$$
$$A^q = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k^q.$$

すると、Grothendieck の algebraic de Rham theorem があって、

<u>定理(1.7)</u>: $H^p(A^\cdot) \cong H^p(X-D; \mathbb{C})$.

但、$A^\cdot$ とは、$\{\cdots \to A^{q-1} \xrightarrow{d} A^q \xrightarrow{d} A^{q+1} \to \cdots\}$ なる複体を表わす。

§2.

今、$A^{\cdot}$に、次のようにfiltrationをいれる。

<u>定義(2.1)</u>:

$$A^{\cdot}_{q-k} := \{ \cdots \xrightarrow{d} A^{q}_{k} \xrightarrow{d} A^{q+1}_{k+1} \xrightarrow{d} \cdots \}$$

すると、$A^{\cdot} \supset \cdots \supset A^{\cdot}_{i} \supset A^{\cdot}_{i+1} \supset \cdots \supset A^{\cdot}_{n+1} = 0$。そして、これに付随したスペクトル列を考えて、以下、$\{E_r^{p,q}, E_\infty^n\}$で表わす。すると、P. Griffiths と P. Deligne による、次の結果がある。

<u>定理(2.2)</u>: Dが非特異で、十分豊富($H^p(X, \Omega^q(kD)) = 0$が、すべての正整数p, kについて成立)なら、

$$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q}$$

が、すべてのp, qについて成立する。

実は、より強く、$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = 0$ $\quad (p+q < n = \dim X)$.

<u>注意(2.3)</u>: この定理は、Hodge filtration との関係で、興味がある。詳しくは、Griffiths "On the periods of certain rational integrals I" (Annals of Math., 90 (1969), 460–495) にある。

(2.2)をDが、一般の特異点を許す因子で、$X = \mathbb{P}^n\mathbb{C}$ の場合に、拡張することを考える。実は、次の定理が成立する。

定理(2.4): $X=\mathbb{P}^n\mathbb{C}$のとき、

$E_1^{p,q} = E_\infty^{p,q} = 0$ が、$1 < p+q < s-1$ をみたすすべての p, q に対して、成立する。但、ここで、$s = \mathrm{codim}_{\mathbb{P}^n}(\Sigma D)$ で、ΣD は、Dの特異点の集合を表わす。

この証明のための、道具を少し、準備する。

定義(2.5): 非負整数 i, k に対して、

$H_k^i := \{ \mathbb{C}^{n+1}$上の同次有理$i$-形式で、$\hat{D}$に沿って、高々$k$位の極を有するもの$\}$

を定義する。但、$\hat{D}$とは、$\mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ なる射影によって、$D \subset \mathbb{P}^n$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の錐として、引き上げたものをいい、'同次'とは、$\mathbb{C}^{n+1}$ への $\mathbb{C}^*$-作用 ($(\xi_0, \cdots, \xi_n) \mapsto (c\xi_0, \cdots, c\xi_n)$, $c \in \mathbb{C}^*$) で、不変なものをいう。

また、i, k のいずれか少なくとも、一方が、負なら、$H_k^i = 0$ と定義する。

すると、次のふたつの複体が得られる。

$$L^{\cdot}_{i-k} := \{ \cdots \xrightarrow{d_L} H^i_k \xrightarrow{d_L} H^{i+1}_{k+1} \xrightarrow{d_L} \cdots \}$$

$$'L^{\cdot}_{i-k} := \{ \cdots \xrightarrow{d'_L} H^i_k \xrightarrow{d'_L} H^{i+1}_{k+1} \xrightarrow{d'_L} \cdots \},$$

但、d_L は外微分作用素、d'_L は、

$$d'_L\omega = \frac{1}{\deg Q}\frac{dQ}{Q}\wedge\omega, \quad \omega \in H^i_k$$（Qは、$\hat{D}$の定義方程式）。

そして、

$$L^{\cdot} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} L_i \supset \cdots \supset L_i \supset L_{i+1} \supset \cdots \supset L_{n+2} = 0,$$

$$'L^{\cdot} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} {'L_i} \supset \cdots \supset {'L_i} \supset {'L_{i+1}} \supset \cdots \supset {'L_{n+2}} = 0$$

なるふたつのフィルターづけられた複体が得られる。

さて、$A^{\cdot}$と$L^{\cdot}$, $'L^{\cdot}$との間の射をつくるのに、次の図式を考える。

$$\begin{array}{l} \tilde{\mathbb{C}}^{n+1} \supset \mathcal{E} \cong \mathbb{P}^n \\ f\downarrow \\ \mathbb{C}^{n+1} \supset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n \end{array}$$

但、fは$\mathbb{C}^{n+1}$の原点中心のblowing up、πは標準射影、$\mathcal{E}$はfから決まる例外因子である。

$p: H^i_k \longrightarrow A^{i-1}_k$ なる準同型を、

$$p(\omega) = \mathrm{res}\circ f^*\omega \quad (\omega \in H^i_k)$$

で、定義する。ここで、res とは、$(\tilde{\mathbb{C}}^{n+1}, \mathcal{E})$ について

8

の留数をとることとする。

$$\begin{array}{ccccc} H^i_k & \xrightarrow{p} & A^{i-1}_k & \xrightarrow{\pi^*} & H^{i-1}_k \\ d_L\downarrow\downarrow d'_L & & \downarrow d & & d_L\downarrow\downarrow d'_L \\ H^{i+1}_{k+1} & \xrightarrow[p]{} & A^i_{k+1} & \xrightarrow[\pi^*]{} & H^i_{k+1} \end{array}$$

なる図式に於て、次の補題が成立つ。

補題(2.6):

(i) $d\circ d=0$, $d_L\cdot d_L=d'_L\cdot d'_L=0$,

(ii) $d_L\cdot\pi^*=\pi^*\cdot d$,

(iii) $d_L\cdot d'_L+d'_L\cdot d_L=0$,

(iv) $d\circ p=p\circ d_L$

(v) $p\circ\pi^*\circ p=0$

(vi) $d'_L\circ\pi^*\cdot p+\pi^*\circ p\cdot d'_L: H^i_k\to H^i_{k+1}$ は、包含写像に他ならない。

(vii) p は全射である $(i>1)$

また、次の補題は、齋藤恭司による。

補題(2.7):(一般化された de Rham の補題)

$H^q({}'L_i)=0$ が $q<s-1$ に対して成立する。

<u>補題(2.8):</u>

$H^p(\mathrm{Gr}_r^q L^\cdot) \xrightarrow[\sim]{\alpha} H^p(\mathrm{Gr}_r^q\,{}'L^\cdot)$ がすべての p, q について同型になる。但、α は $H^i_k \longrightarrow H^i_k$ なる恒等写像から induce された写像とする。

これらを使って、(2.4) を証明する。次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
H^{q+1}(\mathrm{Gr}_r^{p+1}\,{}'L^\cdot) \arrow[d, "\alpha^{-1}", "\wr"'] & & H^q(\mathrm{Gr}_r^p\,{}'L^\cdot) \arrow[ll, "\delta"'] \\
H^{q+1}(\mathrm{Gr}_r^{p+1} L^\cdot) \arrow[dr, "p^*"'] & & H^q(\mathrm{Gr}_r^p L^\cdot) \arrow[u, "\alpha"', "\wr"] \\
& H^q(\mathrm{Gr}_r^p A^\cdot) \arrow[ur, "\bar{\pi}^*"'] &
\end{tikzcd} \qquad (q>1)$$

ここで、$\bar{\pi}^*$ は $\pi^*: A^q_k \longrightarrow H^q_k$ から induce されたもの、p^* は $p: H^{q+1}_k \longrightarrow A^q_k$ から induce されたものとする。

また、δ は、

$$0 \to \mathrm{Gr}_r^{p+1}\,{}'L^\cdot \longrightarrow {}'L^\cdot_p / {}'L^\cdot_{p+2} \longrightarrow \mathrm{Gr}_r^p\,{}'L^\cdot \to 0$$

の Bockstein 写像とする。

$\psi \in A^q_{k+2}$ に対して、$p\circ d_L' \circ \pi^* \psi$ なる元を考えると、(2.6) の (vii) から、$\psi = p(\zeta)$ なる $\zeta \in H^{q+1}_{k+2}$ があるから、

$$\begin{aligned}
& p\circ d_L' \circ \pi^* \psi \\
&= p\circ d_L' \circ \pi^* \circ p(\zeta) \\
&= p(\zeta - \pi^* \circ p \circ d_L' \zeta) \qquad ((4.3)\text{の}(\mathrm{vi}))
\end{aligned}$$

$$= \varphi\zeta \qquad ((4.3)\text{の (V)})$$
$$= \psi$$

これは、前頁の図式に於て、$p^* \circ \alpha^{-1} \circ \delta \circ \alpha \circ \pi^*$ が恒等写像であることを示す。一方、一般に、δ は、

$$\begin{array}{ccc} H^q(Gr^p\, {}'L^\cdot) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(Gr^{p+1}\, {}'L^\cdot) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & H^{q+1}({}'L^\cdot_{p+1}) & \end{array}$$

と分解するから、(2.7) と組み合わせて、(2.4) が示される。

(2.4) の系として、次のことがわかる。

系 (2.9): $H^r(\mathbb{P}^n - D; \mathbb{C}) = 0$ が $1 < r < s-1$ に対して、成立する.

注 (2.10): このことは、topological には、加藤十吉の 'partial Poincaré duality' に対応している。

系 (2.11): $B_1^i = \Gamma(\mathbb{P}^n, \Omega^i(\log D)) = 0$ が $1 < i < s-1$ に対して、成立する.

§3.

$\{E_r^{p,q}, E_\infty^n\}$ の E_2-terms の意味とその必要性を explicit

に考える。

<u>定理(3.1)</u>: 次の列は完全である。

$\cdots \to E_2^{q-k-1,k} \to H^q(B_{k-1}^{\cdot}) \to H^q(B_k^{\cdot}) \to E_2^{q-k,k} \to H^{q+1}(B_{k-1}^{\cdot}) \to H^{q+1}(B_k^{\cdot}) \to \cdots$, 但、$B_k^{\cdot}$ とは $\{\cdots B_k^{q-1} \xrightarrow{d} B_k^{q} \xrightarrow{d} B_k^{q+1} \cdots\}$ なる複体のことをいう。

この定理は、$E_2^{p,q}$ が、対数的極をもつ微分形式からなる複体のコホモロジーと深い関係にあることを示している。

もし、$E_2^{p,q}=E_\infty^{p,q}$ がすべての p,q について成立するような (X,D) に関しては(この例は、次の§で示す)

$$H^q(B_k^{\cdot})=\bigoplus_{i=0}^{k} E_2^{q-i,i}=\bigoplus_{i=0}^{k} E_\infty^{q-i,i} \hookrightarrow H^q(X-D;\mathbb{C})$$

が成立することがわかる。いいかえれば、$H^q(X-D;\mathbb{C})$ の元が、$B_k^{\cdot}$ のコホモロジー類で表わされている。

1次元のコホモロジーについては

<u>定理(3.2)</u>: $X=\mathbb{P}^n$ のとき、

$E_2^{0,1}=E_\infty^{1}$, いいかえれば、

$H^1(B_1^{\cdot})\cong H^1(\mathbb{P}^n-D;\mathbb{C})$ が成立する。

<u>注(3.3)</u>: 一般に、$E_1^{0,1}\neq E_2^{0,1}$, 即ち、閉形式でない B_1^1

の元が存在することがある．例えば，　$Q=x^3+y^2z$ を $\mathbb{P}^2$ 内の因子の定義式とすると．

$$\omega=\frac{3yz\,dx-2zx\,dy-xy\,dz}{x^3+y^2z}$$

は，B^1_1 の元だが，閉形式でない。こういうことは，D が正規交叉のときには，起こりえない（Deligne：“Théorie de Hodge II”）

§4.

ある種の D に対しては，$E_2^{p,q}=E_\infty^{p,q}$ が，計算で示せる。

定義（4.1）：Q が同次多項式のとき，Q が分離型とは，Q が共通変数をもたない単項式たちの和で書けるときを云う．

x^3+y^2z，$x^m+y^m+z^m$，　xyz などが，その例である．

そのとき，そのような Q で定義された $\mathbb{P}^n$ 内の因子を D とすると，

定理（4.2）：　$E_2^{p,q}=E_\infty^{p,q}$ が，$p+q=n$ のとき，成立する．

よって，（2.4）と組み合わせると，

系（4.3）：　D が（4.2）の如きもので，しかも，孤立特異

点を有するとすれば，

$$E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}.$$

が，すべての p，q について成立する．