数理解析研究所講究録
273巻 1976年 135-150

D. Quillen による Serre 予想の解決

名大 理学部 松村英之

“kを体，Aをk上の多項式環 $A=k[X_1,\cdots,X_n]$とすると，A上の有限生成射影加群は自由加群であろう。”という，いわゆるSerre 予想が最近M.I.T. の D. Quillen によってこれに関する帰納法で簡単に証明された。kは体でなくても任意の単項イデアル整域でよい。丁度数理研での代数幾何シンポジュームの最中にQ氏の preprint が Hartshorne 氏のところへ届いたので，その内容を以下に紹介する。

問題自体は，projective module の概念が確立した時すでに専門家なら一応は考えてみそうなことである。J.-P. Serre が1955年に F.A.C. (p.243) ではっきり問題として提出し，更に最初の組織的研究を1958年 (Sém. Dubreil - Pisot, 11^e année) に発表したので彼の名によって呼ばれる。20年もかかったのは，問題が代数と代数幾何の境界あたりに位置して，どちらから攻めてよいか判らなかったせいかも知れない。

Quillen の証明はK理論などの大道具を使うわけではなく極めて初等的であるが, Horrocks : Projective modules over an extension of a local ring, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 714 − 718 にある1つの定理を使う。不幸にして Horrocks のこの仕事は余り注目を引かぬまゝ埋もれていたようで, 1974年の H. Bass のレポート (Sém. Bourbaki n°. 448) でも無視されている。ロシヤの Suslin - Vašeršteín の部分的な結果 (Bass のレポート又は Eisenbud の Arcata Summer School での話を見よ) が純代数的であったのに対し, Quillen の証明は大筋において geometric で, 1ヶ所だけ大変巧妙な代数的レンマに腕力を示している。

$\boxed{\text{Th. 0}}$ (Horrocks) A をネーター局所環, t を A 上の不定元とし, M を $A[t]$ 上の有限生成射影加群とする。M が free であるためのひとつの必要十分条件は, M が定める $X = \operatorname{Spec} A[t]$ 上のベクトル・バンドル $\widetilde{M}$ が $Y = \mathbb{P}^1_A$ 上のベクトル・バンドルに延長できることである。

証明. A の極大イデアルを $\mathfrak{m}$, 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ を k とおく。まず必要性の方は明らか : M が free なら $\widetilde{M} = \mathcal{O}_X^n$ の形で,

$\mathcal{O}_Y{}^n$ がひとつの延長を与える。(われわれはH氏と共にベクトル・バンドルを locally free sheaf と同一視する。)

十分性の証：$\hat{M}$ がY上のベクトル・バンドル $\mathcal{G}$ に延長されるとする。$\mathcal{G}$ は $Y_k = \mathbb{P}^1_k$（Spec A の closed point 上のファイバー）のベクトル・バンドルを induce し，それは Grothendieck の定理（Amer. J. Math. 79 (1957)）によって $\mathcal{O}(n_1) \oplus \mathcal{O}(n_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(n_r)$ $(n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r)$ の形である。$\mathcal{G}$ を $\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_Y(-n_1)$ でおきかえてよいから $n_1 = 0$ として一般性を失わない。さて $\Gamma(Y, \mathcal{G})$ は有限生成の A 加群であり，その $\mathfrak{m}$ 進完備化を ^ で表わせば固有射に関するひとつの基本定理（EGA III (4.2.1)）により

$$\Gamma(Y, \mathcal{G})^\wedge \cong \varprojlim_i \Gamma(Y, \mathcal{G} \otimes_A A/\mathfrak{m}^i).$$

この右辺の逆極限に現われる準同型はすべて全射である。なぜなら，$\mathcal{G}$ が locally free だから

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes A/\mathfrak{m}^{i+1} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes A/\mathfrak{m}^i \longrightarrow 0$$

が exact であり，一方 $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ は k のいくつかの直和と同型で $H^1(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}(n)) = 0$ $(n \geq 0)$ だから $H^1(Y, \mathcal{G} \otimes \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = 0$ となるからである。したがって自然な準同型 $\Gamma(Y, \mathcal{G})^\wedge \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{G} \otimes k)$ が全射

となる。この写像で $\mathfrak{m}\Gamma(Y, \mathcal{G})^{\wedge}$ は 0 に写されるから，$\Gamma(Y, \mathcal{G})^{\wedge} / \mathfrak{m}\Gamma(Y, \mathcal{G})^{\wedge} \simeq \Gamma(Y, \mathcal{G}) / \mathfrak{m}\Gamma(Y, \mathcal{G})$ により $\Gamma(Y, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{G}\otimes k)$ が全射となる。

$\mathcal{G}\otimes k$ は $\mathcal{O}(n_1) = \mathcal{O}$ を直和因子として含むから，$\Gamma(Y, \mathcal{G}\otimes k)$ は Y_k 上決して 0 にならぬ section $\bar{s}$ を含む。その $\Gamma(Y, \mathcal{G})$ における任意の原像をとって s とおけば，s は Y 上でけっして 0 にならない。(s の零点集合を Z とすれば，Z は Y の閉集合で，$Y = \mathbb{P}^1_A \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ が proper map 従って closed map だから Z の像は $\operatorname{Spec} A$ の unique closed point $\mathfrak{m}$ を含む。従って，Z が空でなければ Y_k と交わり，$\bar{s}$ が零点をもつことになって矛盾。) よって，s が定める完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{s} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

において $\mathcal{G}/\mathcal{O}_Y$ は locally free である。この完全系列を $X = \operatorname{Spec} A[t]$ 上に制限すると，X は affine scheme だから

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A[t] \xrightarrow{s} \Gamma(X, \widetilde{M}) = M \longrightarrow \Gamma(X, \widetilde{M}/\mathcal{O}_X) \to 0$$

が exact で，$\Gamma(X, \widetilde{M}/\mathcal{O}_X)$ は射影加群だからこの完全系列は split する。よって $M = A[t] \oplus M'$ の形となり，$\operatorname{rank} M$ についての帰納法で M は free である。証終

今度はAを任意の可換環とする。$A[t]$加群Mに対し，A加群Nがあって　$M \simeq N \otimes_A A[t]$　となるとき，<u>MはAから由来する</u>という。このとき　$N \simeq M/tM$　であるからNはMによって一意的に定まる。次の定理はこの概念の局所性を示す。

$\boxed{\text{Th. 1}}$　Mが有限表示（finite presentation）の$A[t]$加群であるとき，もしAのすべての極大イデアル$\mathfrak{m}$に対して$A_{\mathfrak{m}}[t]$加群$M_{\mathfrak{m}}$が$A_{\mathfrak{m}}$から由来するならば，MがAから由来する。

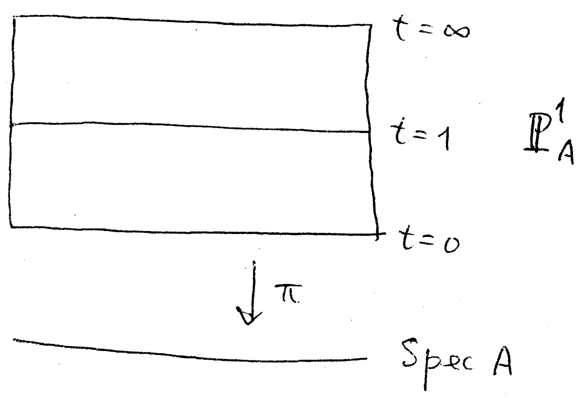
これが，代数屋としてのQuillenの腕力を示した部分である。証明は後に回す。Th. 0とTh. 1から次の定理が従う。

$\boxed{\text{Th. 2}}$　Mが$A[t]$上の有限生成射影加群で，対応するベクトル・バンドル$\widetilde{M}$が$\mathbb{P}^1_A$上のベクトル・バンドルに延長できるとする。しからばMはAから由来する。

証明．$\mathbb{P}^1_A$上のベクトル・バンドルは，有限個の$\mathrm{Spec}(A[t]_f)$又は$\mathrm{Spec}(A[t^{-1}]_g)$の形の開集合による開被覆と有限個のtransition matricesとによって記述できるから，Aを

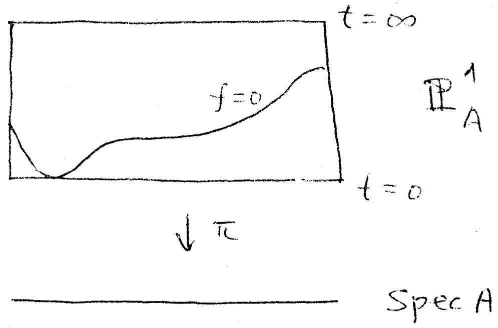
有限生成の部分環におきかえてネーター環であるとしてよい。するとMは有限表示になるから，Th. 1 によりAを局所環 $A_{\mathfrak{m}}$ におきかえてよく，そのときTh. 0 により $M_{\mathfrak{m}}$ は free になるから勿論 $A_{\mathfrak{m}}$ から由来する。　証終。

注意　$\mathbb{P}^1_A$ 上のベクトル・バンドル $\mathcal{G}$ が与えられたとき，Th. 2 により $\mathcal{G}$ を $X = \mathrm{Spec}\, A[t]$ に制限したものも，$X' = \mathrm{Spec}\, A[t^{-1}]$ に制限したものも共にAから由来する。このことから，$\pi : \mathbb{P}^1_A \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ の sections $t=0$, $t=1$, $t=\infty$ の何れにも $\mathcal{G}$ は同型なベクトル・バンドルを induce する。これを $\widetilde{N}$ とおけば，X 上で $\varphi : \mathcal{G} \simeq \pi^*\widetilde{N}$，$X'$ 上で $\varphi' : \mathcal{G} \simeq \pi^*\widetilde{N}$ が存在するが，この2つは $X \cap X'$ 上で一致するとは限らないから，$\mathbb{P}^1_A$ 全体での同型 $\mathcal{G} \simeq \pi^*\widetilde{N}$ が存在するとは必ずしもいえない。たとえば $\mathcal{G}$ として $\mathcal{O}(1)$ をとれば反例になる。



Th. 3 Aを可換環，tを不定元，Mを$A[t]$上の有限生成射影加群とする。もしモニックな（即ち最高次の係数が1の）多項式$f(t) \in A[t]$があってM_fが$A[t]_f$上freeならば，Mが$A[t]$上freeである。（M_fは$\{1, f, f^2, \cdots\}$による局所化。）

証明．fがmonicということから，$f=0$で定義される$X = \mathrm{Spec}\, A[t]$の閉集合は$\mathbb{P}^1_A$でも閉集合である。即ち$f=0$と$t=\infty$とは交わらない。（$\deg f = n$, $g(t^{-1}) = t^{-n} f(t)$とおくと環$A[t^{-1}]$でgとt^{-1}はイデアル(1)を生成するから。）MがX上に定めるベクトル・バンドル$\widetilde{M}$は$X-(f=0) = \mathbb{P}^1_A - (f=0) - (t=\infty)$でtrivial，従ってこれを$t=\infty$の近傍ではtrivial bundleで埋めて，$\mathbb{P}^1_A$上のベクトル・バンドル$\mathcal{G}$に拡張できる。Th. 2により$\widetilde{M} = \pi^* \widetilde{N}$となるA上の射影加群Nがあり，上の注意にのべたように$\widetilde{N}$は$\mathcal{G}$が$t=\infty$にinduceするベクトル・バンドルとも同型である。しかし$\mathcal{G}$は$t=\infty$の近傍ではtrivialであったから，$\widetilde{N}$はSpec A上のtrivial bundle，いいかえればNはA-free．よって$M = N \otimes A[t]$は$A[t]$-freeである。証終．



$\boxed{\text{Th. 4}}$ kが体ならば，n変数多項式環 $A = k[x_1, \cdots, x_n]$ 上の有限生成射影加群 M は free である。kを単項イデアル整域としても同様。

証明. 単項イデアル整域上の自由加群の部分加群はやはり自由加群であるから，$n = 0$ ならたしかに成立つ。nについての帰納法。$t = x_n$ とおく。kが体のときは，$B = k(t)$ とおくと $M \otimes_{k[t]} B$ は $A \otimes_{k[t]} B = B[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ 上の有限生成射影加群だから帰納法の仮定で free. さて M は有限生成だから，容易に判るように $f \in k[t]$ を適当にとれば M_f がすでに A_f - free になる。よって Th. 3 により M 自身が A-free になる。(Serre 予想の解決。)

kが単項イデアル整域のときは，$k[t]$の中の monic polynomials 全体の集合をSとすれば，Sは乗法に関して閉じている。Sに関する局所化を考える。$B = k[t]_S$ とおけば M_S は $A_S = B[x_1, \cdots, x_{n-1}]$ 上の projective module.

一方 Bは容易に判るように単項イデアル整域である（下記）。よって帰納法が使えて，あとはkが体の場合と同様である。

念のためBが単項イデアル環であることを証明しておこう。素元分解の一意性がkで成立つから$k[t]$でも成立つ。（Gaußのレンマ）。よって$k[t]$の高さ1の素イデアルはすべて単項である。Pを$k[t]$の高さ>1の素イデアルとすると，$P \cap k = \mathfrak{p}$は(0)でない。なぜなら，もし$P \cap k = (0)$なら，kの0でない元全体で局所化してもPの高さは変らない，即ちkの商体をKとすれば$\mathrm{ht}\, PK[t] = \mathrm{ht}\, P$. しかし$K[t]$は単項イデアル環だから$\mathrm{ht}\, PK[t] \leq 1$となり矛盾。よって$\mathfrak{p} \neq (0)$で$k/\mathfrak{p}$は体である。$P/\mathfrak{p}[t]$は$k[t]/\mathfrak{p}[t] = (k/\mathfrak{p})[t]$の素イデアルだからmonic polynomial $\bar{f}(t)$で生成される。$\bar{f}$の$k[t]$における原像$f(t)$をmonicになるようにえらぶことができる。すると$f \in P \cap S$だから$PB = (1)$. よってBの素イデアルはすべて$k[t]$の高さ≤ 1の素イデアルから来るから単項である。

BのイデアルIが与えられたとせよ。$I \neq (0)$, $I \neq (1)$ならIを含む極大イデアル(π_1)が存在し，$I = \pi_1 I_1$となる。Bはネーター整域だから中山のレンマで$I \subsetneq I_1$。$I_1 \neq (1)$なら同様に$I_1 = \pi_2 I_2$, $I_1 \subsetneq I_2$. 繰返してゆけばいつかは$I_r = (1)$, $I = (\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_r)$となり単項である。証終。

残しておいたTh.1の証明のために，次の巧妙なレンマを証明する。Aを可換環，tを不定元，RをA上のalgebra（一般に非可換で零因子も持つ），$R[t]=R\otimes_A A[t]$とおく。このとき$(1+tR[t])^*$で，$R[t]$の可逆元で$\equiv 1 \bmod t$となるものの作る乗法群を表わすことにする。

Lemma. A, t, Rを上の通りとし，$f\in A$，$\theta(t)\in(1+tR_f[t])^*$とする。このとき次の性質をもつ整数$k\geqq 0$が存在する；

$g_1, g_2\in A$，$g_1\equiv g_2 \bmod f^kA$ならば，（g_1, g_2にdependする）多項式$p(t)\in(1+tR[t])^*$が存在して

$$p(t)=\theta(g_1t)\,\theta(g_2t)^{-1} \quad \text{in } R_f[t]$$

が成立つ。

証明. $\theta(t)=1+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_rt^r$, $\quad a_i\in R_f$,

$\theta(t)^{-1}=1+b_1t+b_2t^2+\cdots+b_st^s$, $\quad b_j\in R_f$

とおく。Y, Zを不定元，nを自然数とすれば

$$\theta((Y+f^nZ)t)\,\theta(Yt)^{-1}=1+\left[\theta((Y+f^nZ)t)-\theta(Yt)\right]\theta(Yt)^{-1}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{r}a_i\left((Y+f^nZ)^it^i-Y^it^i\right)\sum_{j=0}^{s}b_jY^jt^j$$

$$=1+Zt\sum_i\sum_j f^na_ib_j\,F_{ij}(Y,Z,t)$$

こゝに $F_{ij} \in A[Y, Z, t]$. nを十分大にとると $a_i b_j = c_{ij}/f^n$, $c_{ij} \in R$, と書ける。 $1 + Zt\sum_{i,j} c_{ij} F_{ij} = G(Y, Z, t)$ とおけばこれは $R[Y, Z, t]$ の元で

$$(*) \qquad \theta((Y+f^n Z)t)\,\theta(Yt)^{-1} = G(Y, Z, t) \quad \text{in } R_f[Y, Z, t]$$

が成立つ。Yに$Y+f^n Z$を, Zに$-Z$を代入すると

$$\theta(Yt)\cdot\theta((Y+f^n Z)t)^{-1} = H(Y, Z, t) \quad \text{in } R_f[Y, Z, t]$$

こゝにHも $1 + Zt\,R[Y, Z, t]$ の元である。よって $G\cdot H$ も $H\cdot G$ も $R_f[Y, Z, t]$ で考えれば1になるから,

$$G\cdot H = 1 + Zt\,h_0, \qquad H\cdot G = 1 + Zt\,h_1$$

とおくと h_0, h_1 は $R[Y, Z, t]$ の元でfの適当な巾f^mをかけると0になる。従って $G(Y, f^m Z, t)$ は $R[Y, Z, t]$ で可逆。$k = n + m$ とおき, $g_1, g_2, z \in A$, $g_1 = g_2 + f^k z$ とするとき, $p(t) = G(g_2, f^m z, t)$ とおくと

$$p(t) \in (1 + t\cdot R[t])^*,$$

かつ $(*)$ から

$$\theta(g_1 t)\cdot\theta(g_2 t)^{-1} = p(t) \quad \text{in } R_f[t]$$

が成立つ。 Q.E.D.

定理1の証明. Aを可換環, tを不定元, $B = A[t]$ としMを有限表示B加群とする。 $N = M/tM$ とおく。Aの極大イデアル$\mathfrak{m}$に対し$M_{\mathfrak{m}}$が$A_{\mathfrak{m}}$から由来するということは,

$B_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}[t]$ 上の加群としての同型

$$M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} (M_{\mathfrak{m}}/tM_{\mathfrak{m}}) \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} B_{\mathfrak{m}} = N_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} B_{\mathfrak{m}} = (N \otimes_A B)_{\mathfrak{m}}$$

が存在するということである。 M が B 上有限表示だから $B^p \longrightarrow B^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$ の形の完全系列があり、これに $\otimes_B (B/tB)$ を施して $A^p \longrightarrow A^q \longrightarrow N \longrightarrow 0$ が exact, 即ち N は A 加群として有限表示される。よってこれらに関し Hom と flat な係数拡大とが交換できて

$$\mathrm{Hom}_{B_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}, (N \otimes B)_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Hom}_B(M, N \otimes B)_{\mathfrak{m}},$$

$$\mathrm{End}_{B_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{End}_B(M)_{\mathfrak{m}},$$

$$\mathrm{End}_{B_{\mathfrak{m}}}((N \otimes B)_{\mathfrak{m}}) = \mathrm{End}_A(N) \otimes_A B_{\mathfrak{m}} \qquad \text{etc.}$$

これから容易に判るように、 $M_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ から由来するならば、適当な $f \in A - \mathfrak{m}$ があって M_f が $A_f[t]$ から由来する。これがすべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ について成立つという仮定だから、 $S = \{ f \in A \mid B_f \text{ 加群として } M_f \simeq N \otimes_A B_f \}$ とおくと S が生成するイデアルはどんな極大イデアルにも含まれないから A 全体に一致する。証明すべきことは $M \simeq N \otimes B$, 即ち $1 \in S$ である。よって S が A のイデアルであることを示せばよい。

$f_0, f_1 \in S$, $v \in f_0 A + f_1 A$ とするとき $v \in S$ を示

そう。A を A_v でおきかえれば,

$$f_0, f_1 \in S, \quad f_0A + f_1A = (1) \quad \Rightarrow \quad 1 \in S$$

を示せばよいことになる。仮定により B_{f_i} 上の同型

$$\psi_i : M_{f_i} \xrightarrow{\sim} N \underset{A}{\otimes} B_{f_i} \qquad (i = 0, 1)$$

が存在する。これを $\mathrm{mod}\, t$ で考えて得られる A_{f_i} 上の同型を $\overline{\psi}_i : N_{f_i} \xrightarrow{\sim} N_{f_i}$ とし, ψ_i を $(\overline{\psi}_i^{-1} \otimes 1) \circ \psi_i$ でおきかえれば, $\overline{\psi}_i = \mathrm{identity}$ としてよい。

ψ_i から更に局所化して得られる同型 $M_{f_0f_1} \xrightarrow{\sim} N \otimes B_{f_0f_1}$ を ψ_i' で表わし $(i=0,1)$, $\theta = (\psi_0')^{-1}\psi_1'$ とおくと $\theta \in \mathrm{End}(N \otimes B_{f_0f_1}) = \mathrm{End}(N) \otimes B_{f_0f_1}$, しかも θ は可逆で, $\mathrm{mod}\, t$ で 1 になる。即ち $R = \mathrm{End}(N)$ とおくと

$$\theta \in (1 + tR_{f_0f_1}[t])^{\circ}.$$

Lemma をまず R_{f_0} と $f_1 \in A$ と θ とに, 次いで R_{f_1} と f_0 と θ とに適用し, 自然数 k をどちらにも通用するように十分大きくとる。$(f_0, f_1) = (1)$ から $(f_0^k, f_1^k) = (1)$ が出るから, $g \in f_0^kA$, $1-g \in f_1^kA$ となるような $g \in A$ がえらべる。

$1 \equiv g \mod f_1^kA$ から, $u_0 \in (1 + tR_{f_0}[t])^{\circ}$ が存在して $\theta(t) \cdot \theta(gt)^{-1} = u_0(t)$ in $R_{f_0f_1}[t]$.

$0 \equiv g \mod f_0^k A$ から，$u_1 \in (1 + tR_{f_1}[t])^*$ が存在して $\theta(gt)^{-1} = \theta(0 \cdot t)\,\theta(gt)^{-1} = u_1(t)$ in $R_{f_0 f_1}[t]$.

これから

$$\theta(t) = \theta(t) \cdot \theta(gt)^{-1} \cdot (\theta(gt)^{-1})^{-1}$$
$$= u_0(t)\, u_1(t)^{-1}.$$

よって

$$\psi_0^{-1}\psi_1 = u_0 u_1^{-1} \quad \text{in } R_{f_0 f_1}[t],$$

即ち　$\psi_1 u_1 = \psi_0 u_0$　となる。$\psi_i u_i$ は M_{f_i} から $N \otimes B_{f_i}$ の上への同型で，$\mathrm{Spec}(B_{f_0 f_1})$ 上でうまく貼り合わされるから，Spec B 上の global な同型 $M \xrightarrow{\sim} N \otimes B$ が得られる。　Q.E.D.

主定理の証明は以上で完全に終った。Quillen は先の諸定理の拡張を少し述べている。もう証明は抜きにして書き並べておこう。

$\boxed{\text{Th. } 1'}$　A を可換環，M を多項式環 $A[X_1, \cdots, X_n]$ 上の有限表示の加群とする。A のすべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し $M_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ から由来するならば M が A から由来する。

$\mathbb{A}_A^n = \mathrm{Spec}(A[X_1, \cdots, X_n])$ を $\mathbb{P}_A^n$ の open set と見なすとき，

$\boxed{\text{Th. }2'}$ $\mathbb{A}^n_A$ 上のベクトル・バンドル $\widetilde{M}$ が，$\mathbb{P}^n_A$ 上のベクトル・バンドルに延長されるならば，M は A から由来する。

$\boxed{\text{Th. }4'}$ B を Dedekind 環とすると，$B[X_1, \cdots, X_n]$ 上の有限生成射影加群は B から由来する。

更に予想が1つ．

$\boxed{\text{Conjecture}}$ A を正則ネーター環とすると，$A[t]$ 上の有限生成射影加群は A から由来するであろう。

この予想に関連して彼は次の問を発している。

$\boxed{\text{Question}}$ X を *regular noetherian separated scheme* とし，Z を X 上の *divisor* とする。X−Z 上のベクトル・バンドルは常に X 上のベクトル・バンドルに拡張できるか？

これらに関しては，Horrocks の Proc. London Math. Soc. 14 (1964) にのった2つの論文（ひとつは Th.0 を含むもの）が多少の参考になろう。

――――― ◦ ―――――

おわりに．非常な難問と思われていた Serre 予想が，壮大な新理論を要せずこのように初等的に解かれたことは，やや anti-climax の感を与えないでもない。しかしこの証明が，代数と幾何の美事な結合にもとずいた，珠玉のような傑作であることも確かである。そして定理自身は，たとえば

Murthy が示したように complete intersection の問題にも役立つし，$\mathbb{P}^n_k$ 上のベクトル・バンドルの分類の理論にも疑いもなく役立つに違いない。代数的には次の形で用いることもできる：“A を可換環で，A 上の射影加群はすべて free だとする。$a_1, \cdots, a_n \in A$ がイデアル (1) を生成する（$a_1A + \cdots + a_nA = A$）とき，行ベクトル $(a_1, \cdots, a_n)$ を第1行とする A 上の n 次正方可逆行列が存在する。”なぜなら，$e_1, \cdots, e_n$ を A^n の基底とし，$e_1' = \sum a_i e_i$ とおくと，仮定により $\varphi(e_1') = 1$ となる線形写像 $\varphi : A^n \longrightarrow A$ が存在し，その kernel を M とすると $0 \rightarrow M \rightarrow A^n \xrightarrow{\varphi} A \rightarrow 0$ は split して $A^n = M \oplus Ae_1'$．よって M は projective，従って free で，M の基底 $e_2', \cdots, e_n'$ をえらべば $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ が A^n の基底となるからである。（逆に，A が体上の多項式環のとき，この代数的命題から projective = free が出ることは Serre が 1958 年にすでに示している。）

M. Hochster の近著 Topics in the homological theory of modules over commutative rings (AMS, 1975) の序文から引用して結びに替えたい。

≪It is dangerous to work in too isolated a fashion within commutative rings. It will be apparent in ... that even in trying to deal with a fairly seemingly innocent problem in “pure” algebra, it comes in handy to have some knowledge of (a)the behaviour of vector bundles in topology and (b)the theory of schemes.≫

おわり.