数理解析研究所講究録
274巻 1976年 180-195

モーメント・プロブレムの一定理

自治医大　　竹内　文彦

§0 この小論において次の領域の2.3の性質を論ずる.

$$P \underset{\text{def}}{=\!=} \left\{ A : n\text{次正方行列} \;\middle|\; \begin{array}{l} A = (a_{i+j-2})_{1 \le i,j \le n} \\ A : \text{positive-definite} \end{array} \right\}$$

この問題そのものと解析数論との間には、直接の関係はないのであるが、次のようなモチーフに関連してこの問題を考える. 今

$$Q \underset{\text{def}}{=\!=} \left\{ A : n\text{次正方行列} \;\middle|\; \begin{array}{l} A = (a_{\{i,j\}})_{1 \le i,j \le n} \\ A : \text{positive-definite} \end{array} \right\}$$

とおく. Qを調べることに特別の興味をもっているのであるが、その動機は次の通り。

例えば

$$A = \left(\frac{1}{\{i,j\}^s} \right) \qquad s > 0, \quad \varphi(k,s) = k^s \prod_{p \mid k} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

とおく. そのとき本文において証明するように. Aは positive

- definite であり

$$\lambda > \sum_{k=1}^{n} \varphi(k, s) \longleftrightarrow A - \frac{1}{\lambda} J \text{ : positive-definite}$$

$$\longleftrightarrow A - \frac{1}{\lambda} J \in Q \qquad \text{但し} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

従って Q あるいはその boundary の形態を知ることは解析数論と直接関連がある.

もう1つの例として例えば S を n 以下の平方因子を含まぬ数を小さい順から並べたものの集合とする.

$$A = (a_{ij})_{i,j \in S} \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)=1 \\ 0 & (i,j)>1 \end{cases}$$

とおく. そのとき本文において証明するように, A は非退化であり,

$$\lambda > \sum_{k \in S} \frac{S_k^2}{a_k} \leftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda} K \text{ : positive-definite}$$

$$\leftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda} K \in Q \text{ の } S \text{ に対応する principal-matrix}$$

の集合, 　　但し $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,

$$S_k = \sum_{\alpha_1 \geq 1, \cdots, \alpha_l \geq 1} M\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_l^{\alpha_l}}\right) \qquad k = p_1 \cdots p_l,$$

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_k & 0 \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \qquad a_k は任意の正数$$

さて，PとQは次のように兼共通のフォーミュレーションをもっている．$V = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^{2n-2} \rangle$　$t^{2n-1} = 0$　とする

そのとき　Pは次の　$V^* \supset P_1$ と identity できる．

$$P_1^* \underset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \varphi \in V^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(\alpha^2) > 0 \\ \forall \alpha \in V \quad \alpha \neq 0 \end{array} \right\}$$

又同様に　$W = \langle x_1, \cdots, x_k, \cdots \rangle$　$k \in I$

但し　$I = \{1, \cdots \{i, j\} \cdots\}$　$1 \leq i, j \leq n$　とする．

又　$x_l \, x_m = \begin{cases} x_{\{l,m\}} & \{l,m\} \in I \\ 0 & \{l,m\} \notin I \end{cases}$　を満す乗法が

W内にdefされているものとする．そのときQは次の

$W^* \supset Q_1$　と identify できる．

$$Q_1 \underset{\text{def}}{=\!=} \left\{ \varphi \in W^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(\alpha^2) > 0 \\ \forall \alpha \in W \quad \alpha \neq 0 \end{array} \right\}.$$

上記のような形式的なものにとどまらずPとQには種々の共通点が存在するのであるが，1般的にいってPは調べやすくQは調べにくい．ここに於てはQについては軽くふれるに止め　Pの2,3の性質を論ずる．尚，数はすべて実数とする．

§1　$E(r) \underset{\text{def}}{=\!=} \left(r^{i+j-2} \right)$　$1 \leq i, j \leq n$

とおく．そのとき次の定理は周知である．

定理 $A = (a_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ とする

$$A \in QP \longrightarrow {}^{\exists}\alpha_k > 0 \quad {}^{\exists}r_k \quad s.t.$$

$$A = \sum \alpha_k E(r_k)$$

上記定理を使って PQ 内に乗法を def しよう．

(i) $E(r) * E(s) \underset{def}{=\!=} E(r+s)$

(ii) $A, B \in QP$ とする．そのとき上記定理より．

${}^{\exists}\alpha_k, \beta_l > 0 \quad {}^{\exists}r_k, s_l \quad s.t.$

$$A = \sum \alpha_k E(r_k) \qquad B = \sum \beta_l E(s_l)$$

$$A * B \underset{def}{=\!=} \sum \alpha_k \beta_l E(r_k) * E(s_l)$$

そのとき，$*$ は well-defined であることは容易に分る．
又(i)，(ii)をいい換えることにより．次の定理が出る．

定理 $A = (a_{i+j-2}) \quad B = (b_{i+j-2}) \quad 1 \leq i, j \leq n$

$A, B \in QP$ とする．そのとき

$C = (c_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n} \in P$ である。

但し

$$\left(\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{a_k}{k!}t^k\right)\left(\sum_{l=0}^{2n-2}\frac{b_l}{l!}t^l\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{2n-2}\frac{c_m}{m!}t^m \qquad t^{2n-1}=0$$

今 $P \supset R \underset{\mathrm{def}}{=\!=} \{A\in P \mid a_1=a_3=\cdots=a_{2n-3}=0\}$

を考える。容易に分る如く，Rは上記$*$に関して閉じている

例えば $P\ni A, B$ $\quad A\sim B \underset{\mathrm{def}}{=\!=} {}^{\exists}C, D\in R$ s.t.

$C*A=D*B$ により P内に $\sim$ を入れ，$P/\sim$ を考えたりすることに興味をもっているのであるが，今はRに関連した次の定理をあげるにとどめておく。

定理 $A=(a_{i+j-2})\quad 1\leq i,j<\infty$ とし，

Aの任意のn次 section $\overset{\vee}{A_n}$ は（nに無関係に）Rに属するものとする。そのときAの直交多項式は原点対称，即ちαを zero-pt としてもてば，$-\alpha$も zero pt としてもつ。

但し，1般に無限行列 $X=(x_{ij})\quad 1\leq i,j<\infty$ に対して

そのn次 section $X_n \underset{\mathrm{def}}{=\!=} (x_{ij})\quad 1\leq i,j\leq n$ とする。

又 $A=(a_{i+j-2})\quad 1\leq i,j<\infty$ とし，

$A_n \in$ (nに関した) P $\quad \forall n$ とする、そのとき

A は次の $A_1 \subset U^*$ と identify できる.

$U = \langle 1, t, \cdots t^i, \cdots \rangle$

$$A_1 \underset{def}{=\!=} \{ \varphi \in U^* \mid \varphi(\alpha^2) > 0 \quad \alpha \in U \quad \alpha \neq 0 \}$$

そのとき $P_k(t)$: k次の直交多項式 $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $P_k(t)$: k次の多項式

で、最 t^k の係数正. かつ $\varphi(P_k(t) P_l(t)) = \delta_{kl}$.

定理の証明

$X = (x_{ij})$ $\quad 1 \le i, j < \infty$ を $(1\ t \cdots t^{n-1}) X_n = (1 \cdots (a+tb)^{n-1})$ $\quad b \neq 0$

をみたす. 無限~~ユニポテント~~上3角行列とする.

又 $A = (a_{i+j-2})$ $\quad 1 \le i, j < \infty$ を $A_n \in$ (nに関した) P

とする. そのとき $X_n' A_n X_n \in P$ であるが, X が上3角行列であることを使って容易に次のことが分る 即ち

$\exists B = (b_{i+j-2})$ $\quad 1 \le i, j < \infty$ $\quad$ s.t. $B_n = X_n' A_n X_n$

さて, A と B の直交多項式 $P_k(t)$ と $Q_k(t)$ を調べてみよう.

次が成立する

* ~~$Q_k(t) = \pm P_k(a+bt)$~~

$$P_k(t) = \pm Q_k(a+bt)$$

*の証明

$$A = (a_{i+j-2}) = (\varphi(t^{i-1}t^{j-1})) \qquad 1 \le i,j < n$$

$$B = (b_{i+j-2}) = (\psi(t^{i-1}t^{j-1})) \qquad 1 \le i,j < n$$

とかける．又 $\varphi((a+bt)^{i-1}(a+bt)^{j-1}) = \psi(t^{i-1}t^{j-1})$ である

ことも容易に分る．従って $\psi(Q_k(a+bt)Q_l(a+bt)) = \psi(Q_k(t)Q_l(t))$

$= \delta_{kl}$　従って直交多項式のユニーク性より $Q_k(a+bt)$

$= \pm P_k(t)$　　Q.E.D

今特に $A = (a_{i+j-2}) \quad 1 \le i,j < \infty$ ~~$\ne$~~ $A_n \in$ (nに関けた) R

とし，$X = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ とする．そのとき $A = B$ であ

ることが容易に分るが上記*より．A ~~$\ne$~~ $= B$ の直交多項式

$P_k(t)$ は次の性質をもっている　$P_k(t) = \pm P_k(-t) = (-1)^k P_k(t)$

さて．α を $P_k(t)$ の zero pt とすれば $P_k(\alpha) = 0 = (-1)^k P_k(-\alpha)$

$\therefore\ P_k(-\alpha) = 0$　　よって定理は証明された．

さて $A=(a_{i+j-2})$ $\quad 1\leq i,j<\infty$ $\quad A_n\in$ (nに関した) P

とし, $P_k(t)$ $\quad k=0,1,\cdots$ をその直交多項式とする.

$$tP_0(t) = a_0P_0(t) + b_0P_1(t)$$

$$tP_1(t) = c_1P_0(t) + a_1P_1(t) + b_1P_2(t)$$

$$\vdots \qquad\qquad \cdots(\mathrm{I})$$

$$tP_k(t) = + \cdots\cdots + c_kP_{k-1}(t) + a_kP_k(t) + b_kP_{k+1}(t)$$

$$\vdots$$

となるが. 実は(I)はもっと簡単に

$$tP_0(t) = a_0P_0(t) + b_0P_1(t)$$

$$tP_1(t) = b_0P_0(t) + a_1P_1(t) + b_1P_2(t) \qquad (\mathrm{II})$$

$$\vdots$$

し

$$tP_k(t) = \cancel{b_{k-1}} \quad b_{k-1}P_{k-1}(t) + a_kP_k(t) + b_kP_{k+1}(t)$$

$$\vdots$$

とかけることが分っている(証明も全くtrivialであるが)

IIのmatrix J 即ち

$$J \underset{def}{=\!=} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0 & a_1 & b_1 & & \text{\Large 0} \\ & b_1 & a_2 & b_2 & \\ & & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

を A or $P_k(t)$ に関するヤコビ行列という．容易に分るごとく，$P_k(t)$ の zero pt. は J_k の eigenvalue にほかならない．

J に関する次の定理は全く trivial である．

定理

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & & & & \\ b_0 & 0 & b_1 & & 0 & \\ & b_1 & 0 & b_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \\ & & & b_{k-1} & 0 & b_k \end{pmatrix}$$

$\longleftrightarrow$ $P_i(t)$ $(i=1,\cdots,k)$ の zero pt. 原点対称

証明] $\longleftarrow$ は自明であるから $\longrightarrow$ のみをいう。

1般に ij 成分のみが 1 でその他の成分が 0 である行列を E_{ij} とおく．$D_l \underset{def}{\equiv} \langle E_{1\,l+1}\ E_{2\,l+2} \cdots\cdots\ E_{k-l\,k} \rangle$ $l=-(k-1),\cdots,k-1$

又 $D_l \underset{def}{=} 0$ $\quad l \geqq k$ or $-k \geqq l$ とおけば，簡単に分る如く，$\alpha \in D_l$ $\beta \in D_m \longrightarrow \alpha\beta \in D_{l+m}$ である。

さて今 J_k の eigenvalue のうちプラスのものを大きさの順にならべたものを，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ とし，マイナスのものを小さい方からならべたものを，$\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots$ とする．命題を否定して，i を $\alpha_1=-\beta_1$ $\cdots$, $\alpha_{i-1}=-\beta_{i-1}$, $\alpha_i \neq -\beta_i$ をみたす数とする。

1般性を失うことなく $\alpha_i > -\beta_i$ としてよい．そのとき n をてきとうに大きい奇数とすれば、$tr(J_k^n) > 0$ となる．然るに，$J_k \in D_{-1}+D_1$ であるから，n が奇数であれば、J_k^n における．D_0 の因 factor は zero． $\therefore tr(J_k^n)=0$ Q.E.D

又次の定理もtrivialである.

定理

$A = (a_{i+j-2})_{1 \leq i,j < \infty}$. $A_n \in$ (n!·かんけた) P とする.

$a_1 = a_3 = \cdots = 0 \iff P_k(t)$ の zero pt 原点対称 だ

証明] $\longrightarrow$ は先ほど証明したので $\longleftarrow$ のみをいう.

1, 3, 5, ⋯ は $2i-1$ $i=1,2,3\cdots$ とかける訳であるが.

iに関する induction を使う.

1般に

$$P_k(t) = c \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_k \\ a_1 & a_2 & & a_{k+1} \\ & \vdots & & \\ a_{k-1} & a_k & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & t & & t^k \end{vmatrix} \qquad c>0$$

であることが知られているが. $P_1(t)$ の zero pt. が原点対称であれば. $P_1(t) = c \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = c(a_0 t + a_1)$ において. $a_1 = 0$ である. $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2i-1} = 0$ までいえたとして $a_{2i+1} = 0$ をいう

$$P_{i+1}(t) = c \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_{i+1} \\ \vdots & & \\ a_i & \cdots & a_{2i+1} \\ 1 & & t^{i+1} \end{vmatrix}$$

であるが. $P_{i+1}(t)$ の zero pt. は原点対称であるから. t^i の係数は zero でなければならない. ところで. t^i の係数は.

ラプラス展開より $\pm C a_{2i+1}|A_i|$ であるが、$C\neq 0$ $|A_i|\neq 0$ である故、$a_{2i+1}=0$ が分る　Q.E.D.

§2 一般に $\mathbb{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ $\mathbb{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ とおくとき

$\mathbb{X}\circ\mathbb{Y} \underset{def}{=\!=} \begin{pmatrix}x_1y_1\\\vdots\\x_ny_n\end{pmatrix}$ とおく、又 $(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \underset{def}{=} x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ とする。

今 $X=(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ とし、X の第j列を $\mathbb{X}_j$ とおく

即ち $\mathbb{X}_j=\begin{pmatrix}x_{1j}\\x_{2j}\\\vdots\\x_{nj}\end{pmatrix}$。又特に X を non-singular とする。

そのとき $\exists\, C_{ij}^{k}$ $(1\leq i,j,k\leq n)$ s.t. $\mathbb{X}_i\circ\mathbb{X}_j=\sum_k C_{ij}^{k}\mathbb{X}_k$

である。$D=\begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots\ d_n\end{pmatrix}$ とおき $\mathbb{D}\underset{def}{=}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix}$ とおけば、

$$X'DX=\left((\mathbb{D},\mathbb{X}_i\circ\mathbb{X}_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$ であることは直接の計算で確かめることができる。

さて上記principleを次の2つの行列に対して適用する。

I　$T=X\underset{def}{=}(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$　$x_{ij}=\begin{cases}1 & i\leq j\\ 0 & i>j\end{cases}$

そのとき、容易に分る如く、$\mathbb{X}_i\circ\mathbb{X}_j=\mathbb{X}_{(i,j)}$ である。

$$\therefore \quad X'DX = \left(\left(\mathbb{D}, \mathbb{X}_{(i,j)}\right)\right)_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_2 & & & \\ \vdots & & t_{(i,j)} & \\ t_n & & & \end{pmatrix}_{1\le i,j\le n}$$

但し　$t_i = \sum^{d|i} d_i$. このことを云い換えることにより.

次のprop.を得ることが出来る.

prop.1
$$A = \left(a_{(i,j)}\right) = X' \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & b_n \end{pmatrix} X \qquad b_i = \sum^{d|i} \mu(d)\, a_{\frac{i}{d}}$$

定理
$$A = \left(\frac{1}{\{i,j\}^s}\right)_{1\le i,j\le n} \quad s>0$$
は positive-definite であり.

$$A^{-1}[e] = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k,s)$$
である. 但し $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

~~証明~~ 又 $A[\mathbb{x}] \underset{def}{=} \mathbb{x}' A \mathbb{x}$.

証明 ~~D~~
$$Y = \begin{pmatrix} 1^s & & & \\ & 2^s & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & n^s \end{pmatrix}$$
$s>0$ とおくとき

$$Y'AY = \left(\left((i,j)^s\right)\right) \underset{prop1}{=} X' \begin{pmatrix} \varphi(1,s) & & & \\ & \varphi(2,s) & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & \varphi(n,s) \end{pmatrix} X$$

である.
$$\therefore \quad A^{-1} = YX^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi(1,s)} & & & \\ & \frac{1}{\varphi(2,s)} & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & \frac{1}{\varphi(n,s)} \end{pmatrix} (X')^{-1}(Y')$$

である. ∴
$$A^{-1}[e] = Z \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi(1,s)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \frac{1}{\varphi(n,s)} \end{pmatrix} Z'$$
である.

但し $Z = \left(\varphi(1,s) \cdots \varphi(n,s)\right)$

∴ $A^{-1}[e] = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k,s)$ 又 A が positive-definite であることは上記分解より明らか.

定理　$\lambda > 0$ のとき

$$\lambda > \sum \varphi(k,s) \longleftrightarrow A - \frac{1}{\lambda}J \in Q$$

証明] $A - \frac{1}{\lambda}J$ の ij 成分が $\{i,j\}$ のみに dep していることは,

明らかである. 次の公式は線型代数の理論において周知である.

$$Y' \begin{pmatrix} \alpha & x' \\ x & B \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \alpha - B^{-1}[x] & 0' \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

但し $$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0' \\ -B^{-1}x & E \end{pmatrix}$$

又 $$Z' \begin{pmatrix} \alpha & x' \\ x & B \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} \alpha & 0' \\ 0 & B - \alpha^{-1}xx' \end{pmatrix}$$

但し $$Z = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}x' \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

上の議論を $\begin{pmatrix} \lambda & e' \\ e & A \end{pmatrix}$ に対して適用すれば

$$\exists Y, Z \ \text{s.t.} \ Y' \begin{pmatrix} \lambda & e' \\ e & A \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} \lambda - \sum \varphi(k,s) & 0' \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$Z'\begin{pmatrix}\lambda & e' \\ e & A\end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix}\lambda & 0' \\ 0 & A-\frac{1}{\lambda}J\end{pmatrix} \qquad J = ee'$$

よって、両方の行列が positive-definite であることは同値であることを使うことにより、証明することが出来る。Q.E.D

II　Sを1以上n以下の平方因子を含まぬ数の集合とし

$$X = (x_{ij})_{i,j\in S} \qquad x_{ij} = \begin{cases}1 & (i,j)=1\\ 0 & (i,j)>1\end{cases}$$

そのときIの議論を少し変形することにより Xの non-singularity が分る。さて次の定理は証明なしに承認していただきたい。

定理

$$X^{-1} = \left(\mu(i)\mu(j)\mu(\{i,j\})S_{\{i,j\}}\right)_{i,j\in S}$$

但し　$k = p_1\cdots p_l$ とするとき　$S_k = \sum_{\alpha_1\geq 1 \cdots \alpha_l \geq 1} M\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_l^{\alpha_l}}\right)$

但し　$M(m) \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{[m]}\mu(i)$　$m\geq 1$　$M(m) \underset{def}{=} 0$　$m<1$ 」

又　$\mathbb{X}_i \cdot \mathbb{X}_j$ は $\{i,j\}$ のみに dep することは容易に分る。

即ち　$\{i,j\} = \{i',j'\} \longrightarrow \mathbb{X}_i \cdot \mathbb{X}_j = \mathbb{X}_{i'} \cdot \mathbb{X}_{j'}$　---- (2)

定理

$$\lambda > \sum_{k\in S}\frac{S_k^2}{a_k} \longleftrightarrow ADA - \frac{1}{\lambda}K : \text{positive-definite}$$

但し　$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & O \\ 0 & \end{pmatrix}$　(以下 positive-definite を p.d. とかく)

又 $a_k > 0$ $\quad D = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & a_k & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$ $k \in S$ とする.

証明] $ADA - \frac{1}{\lambda}K$: p.d. $\leftrightarrow D - \frac{1}{\lambda}A^{-1}KA^{-1}$: p.d.

$\leftrightarrow D - \frac{1}{\lambda}\left(S_i S_j\right)$: p.d. $\quad i, j \in S \leftrightarrow \lambda E - D^{-\frac{1}{2}}\left(S_i S_j\right) D^{-\frac{1}{2}}$

: p.d. $\leftrightarrow \lambda > Tr\left(D^{-\frac{1}{2}}\left(S_i S_j\right) D^{-\frac{1}{2}}\right) \leftrightarrow \lambda > \sum_{k \in S} \frac{S_k^2}{a_k}$ Q.E.D.

§2において書いたことは，全く elementary な linear-algebra であるが，このことを素材にして，次の step へ進むことが出来る．例えば上記(2)に対しては，

$$X_i \cdot X_j = \sum_{k \in S} C_{ij}^k X_k \quad i, j \in S$$

但し $C_{ij}^k = \sum_{\substack{k d \mid \{i, j\} \\ k d \in S}} \mu(d)$ が成立する，この algebra はもっと広はんな準順序集合 S に対して，natural な拡張をもち，種々の応用をもっている。

又 §1 でふれた如く，$A = \left(a_{i+j-2}\right)_{1 \le i, j \le n}$ $\mathbb{Q}$ のとき

$A \in P$ であるための ~~条件~~ criterion は完全に与えられている，然し同じような criterion を $\mathbb{Q}$ の場合に与えることは非常に難かしいのではないかと思うが，種々の十分条件はあたえることが出来る，ここでは，証明抜きに，十分初等的ではあるが，稍々証しゅう悪な

印象を与える例を1つあげるにとどめておく.(十分条件そのものではない)

$\sigma > 1$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \frac{\mu(k)}{k^{\sigma}} > 0$ をみたす任意の数とする。$\forall \ell$。

$$A = \left(\left[\frac{n}{\{i,j\}} \right] \right) \qquad B = \left(\frac{1}{\{i,j\}^{\sigma}} \right) \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

とおくとき、A, B は p.d. であり.

$$A^{-1}[e] = \sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{n}{i}\right)^2 \qquad B^{-1}[e] = \sum_{k=1}^{n} \psi(k,\sigma)$$ である。

又

$$A - \cancel{h}\, v B$$ は p.d. である. 但し $\cancel{h}\, v$ は $0 < \cancel{h}\, v < \frac{1}{m}$ をみたす任意の数 又 $m = \frac{1}{n^{\sigma}} \times \left(\min_{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\mu(k)}{k^{\sigma}} \right)$ とする

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \psi(k,\sigma) < v \sum_{i=1}^{n} M\left(\frac{n}{i}\right)^2$$

ほかにも色々あるが、別の機会にふれることにする。