

## Bernoulli関数の Dirichlet 指標和への応用

九大理 金光 滋  
白谷克巳

論文[3]の目的は, Hua[1]の指標和に関する不等式の一般化を与えることである。即ち, 次の定理が成り立つ。

定理1.  $\chi$ が $f$ を法とする, 単位指標 $\chi_0$ と異なる, 原始的 Dirichlet 指標 $\chi$ とし, しかも偶指標であるとき, 偶数 $n$ と,  $1 \leq m_0 < f$ なる $m_0$ に対し, 不等式

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) - \frac{1}{n} \{ (B_{\chi} - m_0)^n - B_{\chi}^n \} \right| \leq \frac{1}{n} f^{n-\frac{1}{2}} |B_n(\frac{m_0}{f}) - B_n(0)|$$
が成り立つ。ここで $B_n(\alpha)$ は $n$ 番目の Bernoulli 多項式を,  $B_{\chi}^n$ は Leopoldt の一般 Bernoulli 数  $B_{\chi}^n = f^{n-1} \sum_{m=1}^f \chi(m) B_n(\frac{m}{f})$ を表わし,  $(B_{\chi} - m_0)^n$ は記号的に  $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_{\chi}^r (-m_0)^{n-r}$ を表わす。

まず, 次の補題が成り立つ。

補題.  $\chi$ が $f$ を法とする,  $\chi_0$ と異なる原始指標 $\chi$ であるとき,  $n \geq 2$ に対し,

$$\sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) = (-1)^n \frac{1}{n} \{ (B_{x-m_0})^n - B_x^n \} \\ + (-1)^n f^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(2\pi i)^n} \tau(\chi) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \frac{m_0}{f} l} - 1}{l^n} \bar{\chi}(l)$$

となる。ここで  $\tau(\chi)$  は正規化された Gauss の和で、 $\bar{\chi}$  は  $\chi$  の逆指標を示し、 $\sum'$  は  $l=0$  に対応する項を除いた和を表わす。

証明. Bernoulli 関数  $P_n(x)$  を、 $P_n(x) = B_n(x)$  ( $0 \leq x < 1$ ),

$P_n(x+1) = P_n(x)$  と定義すれば、

$$-B_n(x - \frac{m_0}{f}) + B_n(x) + P_n(x - \frac{m_0}{f}) - P_n(x) = \begin{cases} n(x - \frac{m_0}{f})^{n-1}, & 0 \leq x < \frac{m_0}{f}, \\ 0, & \frac{m_0}{f} \leq x < 1 \end{cases}$$

が得られる。これを我々の和に適用すれば、

$$\sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) = (-1)^n \frac{1}{n} f^{n-1} \sum_{m=1}^f \{ B_n(\frac{m}{f} - \frac{m_0}{f}) - B_n(\frac{m}{f}) \} \chi(m) \\ + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} f^{n-1} \sum_{m=1}^f \{ P_n(\frac{m}{f} - \frac{m_0}{f}) - P_n(\frac{m}{f}) \} \chi(m)$$

となり、第1項は、Bernoulli 多項式の性質を用いて、

$(-1)^n \frac{1}{n} \{ (B_{x-m_0})^n - B_x^n \}$  となることがわかる。第2項は、

Bernoulli 関数の Fourier 級数展開

$$P_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i l x}}{l^n}$$

を使えば、 $(-1)^n f^{n-1} (n-1)! \frac{1}{(2\pi i)^n} \tau(\chi) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \frac{m_0}{f} l} - 1}{l^n} \bar{\chi}(l)$

となる。

定理の証明. 補題の表示式の第2項の Fourier 級数の部分

は、 $\chi, n$  が偶のとき、 $-4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \frac{m_0}{f} l}{l^n} \bar{\chi}(l)$

となるが、これは、絶対値において、 $4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi \frac{m_0}{f} l}{l^n}$  以下である。

一方、 $0 \leq x < 1$  での  $B_n(x)$  の Fourier 級数表示は

$$B_n(x) = -\frac{n!}{(2\pi i)^n} 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi l x}{l^n}$$

であったから, これから  $B_n(\frac{m_0}{f}) - B_n(0)$  の絶対値を求め, 上の評価と比較すれば定理が得られる.

定理2. 定理1の条件の下で,

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m) \chi(m) \right| \leq \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} m_0 \left(1 - \frac{m_0}{f}\right).$$

証明. 定理1で  $n=2$  の場合である.  $B_x^1 = B_x^0 = 0$  に注意すればよい.

注1. 定理2から  $|S_2(A)| = \left| \sum_{a=1}^A \sum_{m=1}^a \chi(m) \right| \leq \frac{1}{2} f^{\frac{1}{2}} A$ ,  $A \geq 1$  が直ちに導びかれ, これを用いて, 実2次体の基本単数に対する Hua の評価  $\log \varepsilon < f^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \log f + 1\right)$  が得られる.

定理3. 定理1の条件の下で,

$$\left| \sum_{m=1}^{m_0} (m_0 - m)^{n-1} \chi(m) \right| \leq c f^{n-\frac{1}{2}} (n-1)! \frac{1}{(2\pi)^n},$$

ここで  $c$  は正の絶対定数である.

証明.  $B_x^n \ll n! f^{n-\frac{1}{2}}$ ,  $n \geq 2$  を用いればよい.

注2. 帰納的に  $S_n(x) = \sum_{m=1}^x S_{n-1}(m)$ ,  $S_1(x) = \sum_{m=1}^x \chi(m)$  と定義するとき, 次の関係式が成り立つ.

$$S_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{b=1}^{n-1} S(n-1, b) (-1)^{n-1+b} \sum_{j=1}^{x+1} (x+1-j)^b x C_j^x,$$

ここで,  $S(a, b)$  は, 第1種の Stirling 数で,

$$x(x-1)\cdots(x-a+1) = \sum_{b=1}^a S(a, b) x^b$$

により定義される。

注3.  $\chi$  が奇指標で,  $n$  が3以上の奇数のときも同様な定理が成り立つ。

## 文 献

- [1] L. K. Hua, On the least solution of Pell's equation, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48(1942), 731-735.
- [2] G. Polya, Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, *Göttinger Nachr.* 1(1948), 21-29.
- [3] S. Kanemitsu and K. Shiratani, An application of the Bernoulli functions to character sums, *Mem. Facu. Sci., Kyushu Univ.*, 30(1976) (to appear).