数理解析研究所講究録
274巻 1976年 37-49

テータ・ワイル和

名大理　中井喜信

0° 今ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内のベクトルは縦ベクトルで記すものとして、$\mathfrak{G}$ を $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉凸多面体とし、又 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}^n$ を用意する。今 A を $n \times n$ の実対称行列として、表題に言う所の「テータ・ワイル和」とは次の有限和の事である。

$$\theta(A, \mathfrak{a}\,;\,\mathfrak{G}, \mathfrak{r}) \underset{\mathrm{df.}}{=} \sum_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{G}} e\left(\frac{1}{2}A[\mathfrak{n}+\mathfrak{r}] + \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{n} \rangle\right)\ ,$$

但し、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{G}$ 内の格子点を動き、$A[\mathfrak{x}] = {}^t\mathfrak{x} A \mathfrak{x}$ $(\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n)$、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドの内積、$e(x) = e^{2\pi i x}$ $(x \in \mathbb{R})$ である。又 A が正則ならば、代りに

$$\theta(A\,;\,\mathfrak{G}, \mathfrak{r}) \underset{\mathrm{df.}}{=} \sum_{\mathfrak{n} \in \mathfrak{G}} e\left(\frac{1}{2}A[\mathfrak{n}+\mathfrak{r}]\right)$$

を扱う事にする。この和を、n 及び $\mathfrak{G}$ の頂点の個数は $O(1)$ と見なして、誤差 $O(\{\mathfrak{G}の体積\}^{\frac{1}{2}})$ 又は $O(\{\mathfrak{G}の

直径$\}^{\frac{h}{2}}$) を許して、Diophantus 的に表示したい。 $h=1$ の場合は [1] に扱われている。 ここでは、[2] の続きとして $h=2$ の場合の様子を述べる。

1° 復習として $h=1$ の場合は次のようになっていた。今記号を少しかえ、α, X, N, γ を実数 ($\alpha \neq 0$, $N>0$) として

$$\vartheta\left(\frac{1}{\alpha} ; N, X, \gamma\right) \underset{\text{df.}}{=} \sum_{X \leq n \leq X+N} e\left(\frac{1}{2\alpha}(n+\gamma)^2\right)$$

とおく。之に対して次の両者が成立する。

(Lemma 1) $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha > 0$, $\frac{1}{\alpha} = a + \alpha'$ ($a \in \mathbb{N}$, $\underset{\neq 0}{\alpha' \in \mathbb{R}}$), γ, γ' は実数で $\frac{1}{2}a - \gamma \equiv \alpha'^{-1}\gamma' \bmod. 1$, となっていて、更に $N \geqq 2\alpha$ と仮定すれば

$$\vartheta\left(\frac{\varepsilon}{\alpha} ; N, X, \gamma\right) = e\left(\varepsilon\left\{\frac{1}{8} + \frac{\gamma'^2}{2\alpha'}\right\}\right) \cdot \vartheta\left(\frac{-\varepsilon}{\alpha'} ; \frac{N}{|\alpha|}, \frac{X}{|\alpha|}, \gamma'\right) \cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} + O\left(1 + |\alpha|^{\frac{1}{2}}\right)$$

が成立する。

(Lemma 2) $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha > 0$, $\frac{\alpha}{2} \geqq N > 0$ とし、又 $\gamma, \tilde{\gamma}$ は実数で $\tilde{\gamma} \equiv \gamma \bmod. \alpha$ 及び区間 $\left[\frac{X+\tilde{\gamma}}{\alpha}, \frac{X+N+\tilde{\gamma}}{\alpha}\right]$ は区間 $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$ に含まれているものとする。この時

$$\vartheta\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\,;N,X,\gamma\right) = e\left(\varepsilon\cdot\frac{\gamma^2-\tilde{\gamma}^2}{2\alpha}\right)\cdot\int_{X+\tilde{\gamma}}^{X+\tilde{\gamma}+N} e\left(\frac{\varepsilon}{2\alpha}u^2\right)du \quad + O(1)$$

が成立する。

以上はいずれも古典的であるが、両者を組み合わせて一般の場合の $\vartheta(\frac{1}{\alpha}\cdot;N,X,\gamma)$ の誤差 $O(N^{\frac{1}{2}}+1)$ を含む Diophantus 的な表示を得る。([1] を参照されたい*)) 各誤差項は次節 2° 中の $\Psi_\varepsilon(y)$ を使えば、級数の形で表わせる。いわゆる Bruhat 分解を使えば ($h=1$ の場合) 形は見易くなる。

2° $h=2$ の場合にも上記の Lemma 達に相当する事が得られるが複雑であるので Lemma 1 の類似について結果のみ述べる事とする。ここではすべて誤差項はいわゆる log.-因子だけ期待する表示より劣っている。以下の事は [2] も参照されたい。今 $y\geq 0$, $\varepsilon=\pm1$ に対し

$$\Psi_\varepsilon(y) \underset{\mathrm{def}}{=} e\left(-\frac{\varepsilon}{2}y^2\right)\cdot\int_y^\infty e\left(\frac{\varepsilon}{2}u^2\right)du$$

---

*)
[1] の 166 ページ (2) 式は次の如くに訂正する。

$$X_{k+2} = (\alpha_0\cdots\alpha_{k+1})^{-1}X_0 + (-1)^{k+1}\alpha_0^{-1}\gamma_0 A_k + {} + (-1)^{k+1}\frac{1}{2}(-A_k+B_k) + (-1)^k E_k + \frac{1}{2}\ .$$

従って 171 ページ (2) の条件偶奇は入れかえる。

とおく。又 A は 2×2 の実対称行列で $\det A \neq 0$, 及び. $\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2 \in \mathbb{R}^2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{b}_1 \not\parallel \mathbb{b}_2$, $k_1 k_2 (k_2 - k_1) \neq 0$ とし. $\mathbb{P}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^2$, $D > 0$ を用意する。更に $\mathbb{K}_1 = A \cdot (\mathbb{P} + \boldsymbol{\gamma})$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1 + \Delta^{-1} \cdot D \cdot \left({}^{\;\;-1}_{1}\right) \cdot (\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1)$ 但し $\Delta = \det(\mathbb{b}_2, \mathbb{b}_1)$ とおく。この時

$$\Psi = \Psi(A^{-1}; \mathbb{b}_2, k_2; \mathbb{b}_1, k_1; \mathbb{P}, \boldsymbol{\gamma}, D)$$

$$\overline{\overline{\mathrm{def.}}} \sum_{\mathbf{m}} \int_0^D dt \cdot \mathrm{sgn}\left(t - \langle \mathbb{b}_1, \mathbf{m} - \mathbb{K}_1 \rangle\right) \times |k_2 - k_1|^{\frac{1}{2}} \times \Psi_{\mathrm{sgn}\, k_1}\left(|k_1|^{\frac{1}{2}} \left| t - \langle \mathbb{b}_1, \mathbf{m} - \mathbb{K}_1 \rangle \right|\right) \times$$

$$\times\, e\begin{pmatrix} \frac{k_2}{2}\left\{t - \langle \mathbb{b}_2, \mathbf{m} - \mathbb{K}_1 \rangle\right\}^2 - \langle \mathbf{m}, \mathbb{P} \rangle - \frac{1}{2} A^{-1}[\mathbf{m} - \mathbb{K}_1] \\ + \frac{1}{2} \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \left\{\langle \mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1, \mathbf{m} - \mathbb{K}_1 \rangle\right\}^2 + \frac{1}{2} A^{-1}[\mathbb{K}_1] \end{pmatrix}$$

$$- \sum_{\mathbf{m}} \mathrm{sgn}\, k_2 \cdot \mathrm{sgn}(k_2 - k_1) \cdot \mathrm{sgn} \langle \mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1, \mathbf{m} - \mathbb{K}_1 \rangle \times e\left(\frac{1}{8} \mathrm{sgn}\, k_1\right) \times$$

$$\times\, \Psi_{\mathrm{sgn}(k_2 - k_1)}\left(\frac{|k_2|}{|k_2 - k_1|^{\frac{1}{2}}} \cdot \left| \langle \mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1, \mathbf{m} - \mathbb{K}_1 \rangle \right|\right) \times$$

$$\times\, e\left(\frac{1}{2} \frac{k_2^2}{k_2 - k_1} \left\{\langle \mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1, \mathbf{m} - \mathbb{K}_1 \rangle\right\}^2 - \frac{1}{2} A^{-1}[\mathbf{m} - \mathbb{K}_1] - \langle \mathbf{m}, \mathbb{P} \rangle + \frac{1}{2} A^{-1}[\mathbb{K}_1]\right)$$

とおく。ここに 第一の和は $\mathbb{R}^2$ 内の格子点を動き、第二の和は $\mathbb{R}^2$ 内の格子点で $\prod_{j=1}^{2} \langle \mathbb{b}_j, \mathbf{m} - \mathbb{K}_j \rangle \leq 0$ となるものの上の和である。実際にはこの右辺の無限級数の収束は判定難であるので、[2] の §1 Lemma 2 により. $\mathbf{m} = \binom{m_1}{m_2}$ はいつも $|m_j| \leq M_j$ $(j = 1, 2)$ の範囲に制限して、有限和として扱うのであるが、そのための修正項を記す事は略す。従っ

て以下の等式（≒）は、すべてDiophantus的な修正項を追加して後はじめて成立しているものと見られたい。

多辺形 $\mathcal{B}$ の各辺を $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2 = \left\{ \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi} t + \mathbb{P}_1 \; ; 0 \le t \le D \right\}$ で表わし．又 $A = \begin{pmatrix}\delta_1 & \\ & \delta_2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right]$ と直交行列で対角化して $\varepsilon_j = \operatorname{sgn}\delta_j$ $(j=1,2)$, $0 \ne |\delta_j| \ll 1$ $(j=1,2)$ とする。仮定として、各辺に対し $A\left[\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right] \ne 0$，及びもし $\sin(\theta-\varphi) \ne 0$ ならば $|\sin(\theta-\varphi)| \gg 1$ となっているものとする。

［定理 1］ $A^{-1} = R + A'$，R は整数係数の対称行列 $\left(= \begin{pmatrix} r_1 & r' \\ r' & r_2 \end{pmatrix}\right)$，$A'$ は実対称行列として $\det A \ne 0$, $\det A' \ne 0$ とすれば

$$\vartheta(A ; \mathcal{B}, \gamma) \doteqdot |\det A|^{-\frac{1}{2}} e\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{8}\right) \cdot e\left(\tfrac{1}{2} A'[\gamma']\right) \times \vartheta\left(-A' ; A(\mathcal{B}+\gamma), \gamma'\right)$$

$$+ \sum_{m \in \partial\mathcal{B}} \frac{1}{2} \cdot e\left(\tfrac{1}{2} A[m+\gamma]\right)$$

$$+ \sum_{\mathcal{B}\text{の辺}} (\pm) \cdot |\det A|^{-\frac{1}{2}} \times \Psi\left(A^{-1} ; \frac{\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}}{A\left[\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right]}, -A\left[\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right] ; \frac{\binom{\cos\theta}{\sin\theta}}{\delta_1 \cos(\theta-\varphi)}, \delta_1 \cos^2(\theta-\varphi) ; \mathbb{P}, \gamma, D \right)$$

$$+ O\left(\left(1 + |\det A|^{-\frac{1}{2}}\right) \times \log \text{因子} \right)$$

となる。但し $\gamma' \underset{\mathrm{df}}{=} -A^{-1} \cdot \left(\gamma - \tfrac{1}{2}\binom{r_1}{r_2}\right)$ であり $\mathbb{P}$ は $t=0$ における辺 $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2$ の頂点、又辺 $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2$ が $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \cdot (\mathcal{B}+\gamma)$ において水平又は垂直になる時は適当に極限移行により Ψ

を考える。

之は [2] §3 の Proposition 1 の書きかえである。

3° 今 ψ の定義の中の二つの級数のうち積分を含む方を ψ_I，含まぬ方を ψ_s とおき、更に ψ_s において m が $\prod_{j=1}^{2} \langle \mathbf{b}_1, m-\mathbf{k}_j \rangle = 0$ となる時はその項に重み $\frac{1}{2}$ をつけた級数を ψ_s^* とし $\psi^* = \psi_I + \psi_s^*$ とおく。

(Lemma 3) $A^{-1} = R + A'$，(R, A' は定理 1 と同様) として $\Delta = \det(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) \neq 0$ を仮定する．この時

(イ) $A'[x] = k_2 \cdot \{\langle \mathbf{b}_2, x \rangle\}^2 + \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \{\langle \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, x \rangle\}^2$ ，であれば

$$\psi^*(A^{-1} ; \mathbf{b}_2, k_2 ; \mathbf{b}_1, k_1 ; \mathbf{P}, \gamma, D)$$

$$\doteqdot |\det A'|^{-\frac{1}{2}} \times e\left(\tfrac{1}{2} A'^{-1}[\gamma']\right) \times \operatorname{sgn}\left(k_2 \cdot \check{A}[\mathbf{b}_1] \times \left({}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{A} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\right)\right) \times e\left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right) \times$$

$$\times\, e\left(\tfrac{1}{8} \operatorname{sgn}(k_2 - k_1)\right) \times$$

$$\times\, \psi^*\left(-A'^{-1} ; \frac{\Delta \cdot \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)}{(-)\, \check{A}'[\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1]} , (-) \frac{\check{A}'[\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1]}{\Delta^2} ; \right.$$

$$; \frac{\Delta \cdot \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \cdot \mathbf{b}_1}{\left({}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{A}' \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\right)} , (-) \frac{\{{}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{A}' \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\}^2}{\Delta^2 \cdot \check{A}'[\mathbf{b}_1]} ;$$

$$\left. ; -A \cdot (\mathbf{P} + \gamma) , -A'^{-1} \cdot \left(\gamma - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}\right) , D \right)$$

$$+\, O(\log\text{-因子})$$

となる。但し D は両辺で共通であり、又 $\check{A} = (-)\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$。

(ロ) $\dfrac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1] \neq 0$, $\det A' + \dfrac{k_2}{k_2-k_1}\Big(k_1 k_2 \Delta^2 -$

$- (k_2-k_1)\cdot \check{A}'[\mathbb{b}_2] - k_1\, \check{A}'[\mathbb{b}_2 - \mathbb{b}_1]\Big) \neq 0$

ゆえに

$$\Psi_{\mathrm{I}}(A^{-1}\,;\, \mathbb{b}_2, k_2\,;\, \mathbb{b}_1, k_1\,;\, \mathbb{P}, \gamma, D)$$

$$\doteqdot |\det A'|^{-\frac12}\cdot e\Big(\tfrac12 A'^{-1}[\gamma']\Big)\, \operatorname{sgn}\Big(\det A' - \frac{\check{A}'[k_2\mathbb{b}_2 - k_1\mathbb{b}_1]}{k_2-k_1}\Big) \times$$

$$\times \operatorname{sgn}\Big(\frac{k_2}{k_2-k_1}\, {}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\, \check{A}'(k_2\mathbb{b}_2 - k_1\mathbb{b}_1) - \det A'\Big) \times$$

$$\times\, e\Big(\frac18 \operatorname{sgn}\Big(\frac{k_2^2\Delta^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]\Big)\Big) \times$$

$$\times \Bigg\{ e\Big(\frac{\varepsilon_1}{8}\Big) \times \Psi_{\mathrm{I}}\Bigg(-A'^{-1}\,;\, \frac{\frac{\Delta k_2^2}{k_2-k_1}(1,-1)(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1) - \check{A}'\mathbb{b}_1}{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\cdot \check{A}'[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1] - \det A'}\,,\, (-)\frac{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{A}'[\mathbb{b}_1] - \det A'}{\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]}\,;$$

$$;\, \frac{\frac{\Delta k_2}{k_2-k_1}(1,-1)(k_2\mathbb{b}_2 - k_1\mathbb{b}_1) - \check{A}'\cdot\mathbb{b}_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot {}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\check{A}'(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1) - \det A'}\,,$$

$$,\, \frac{\Big\{\frac{k_2}{k_2-k_1}\, {}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\check{A}'(k_2\mathbb{b}_2 - k_1\mathbb{b}_1) - \det A'\Big\}^2}{\Big(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]\Big)\Big(\det A' - \frac{1}{k_2-k_1}\check{A}'[k_2\mathbb{b}_2 - k_1\mathbb{b}_1]\Big)}\,;$$

$$;\, -A\cdot(\mathbb{P}+\gamma)\,,\, -A'^{-1}\Big(\gamma - \frac12\binom{v_1}{v_2}\Big)\,,\, D\Bigg)$$

$$- e\Big(\frac18\operatorname{sgn}\Big(\frac{k_2^2\Delta^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]\Big)\Big) \times \operatorname{sgn}\Big(\det A' + \frac{k_2}{k_2-k_1}\big(k_1k_2\Delta^2 - k_1\check{A}'[\mathbb{b}_2] - (k_2-k_1)\check{A}'[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]\big)\Big) \times$$

$$\times \Psi_{\mathrm{I}}\Bigg(-A'^{-1}\,;\, \frac{\frac{\Delta k_1 k_2}{k_2-k_1}(1,-1)(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1) - \check{A}'\mathbb{b}_2}{\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\cdot \check{A}'[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1] - \det A'}\,,$$

$$
\left\{ \;\cdots \left(\begin{array}{l}
\quad , (-)\, k_2 \cdot \dfrac{\frac{k_1 k_2}{k_2-k_1}\cdot \check{A}'[b_2-b_1] - \det A'}{\det A' + \frac{k_2}{k_2-k_1}\,((*))} \;; \\[2ex]
; \dfrac{\frac{\Delta k_2}{k_2-k_1}\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}(k_2 b_2 - k_1 b_1) - \check{A}' b_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot {}^t(b_2-b_1)\check{A}'(k_2 b_2 - k_1 b_1) - \det A'} \;, \\[2ex]
, k_1 \dfrac{\left(\frac{k_2}{k_2-k_1}\,{}^t(b_2-b_1)\check{A}'(k_2 b_2 - k_1 b_1) - \det A'\right)^2}{\left(\det A' - \frac{\check{A}'[k_2 b_2 - k_1 b_1]}{k_2-k_1}\right)\cdot\left(\det A' + \frac{k_2}{k_2-k_1}\,((*))\right)} \;; \\[2ex]
; -A\cdot(p+r),\; -A'^{-1}\left(r - \tfrac{1}{2}\binom{r_1}{r_2}\right),\; D
\end{array} \right)\right.
$$

となる。但し $\check{A} = (-)\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ であり．右辺第2式中 $((*))$ と略記したものは $k_1 k_2 \Delta^2 - k_1\cdot\check{A}'[b_2] - (k_2-k_1)\cdot\check{A}'[b_2-b_1]$ である。

(ハ) $\dfrac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[b_1] \neq 0$ ならば

$$\psi_0^*(A^{-1};\, b_2, k_2;\, b_1, k_1;\, p, r, D)$$

$$\doteqdot |\det A'|^{-\frac12}\, e\left(\tfrac{1}{2}A'^{-1}[r']\right)\cdot \varepsilon_2\, \mathrm{sgn}(\check{A}'[b_1])\, \mathrm{sgn}\left({}^t b_1 \check{A}'(b_2-b_1)\right)\cdot e\left(\tfrac{\varepsilon_1}{8}\right)\times$$

$$
\times\left\{ \begin{array}{l}
e\left(\tfrac{1}{8}\,\mathrm{sgn}(k_2-k_1)\right)\times \\[1ex]
\times\, \psi_I\left(\begin{array}{l}
-A'^{-1};\ \dfrac{\Delta \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}(b_2-b_1)}{\check{A}'[b_2-b_1]},\ (-)\dfrac{\check{A}'[b_2-b_1]}{\Delta^2}\;; \\[2ex]
;\ \dfrac{\Delta \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} b_1}{{}^t b_1 \check{A}'(b_2-b_1)},\ (-)\dfrac{\{{}^t b_1 \check{A}'(b_2-b_1)\}^2}{\Delta^2\cdot \check{A}'[b_1]}\;; \\[2ex]
;\ -A\cdot(p+r),\ (-)A'^{-1}\left(r - \tfrac12\binom{r_1}{r_2}\right),\ D
\end{array}\right)
\end{array}\right\} \cdots
$$

$-$

$$
\left\{ - e\left(\frac{1}{8}\operatorname{sgn}\left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathfrak{b}_1]\right)\right) \times \right.
$$

$$
\times \Psi_{\mathrm{I}}\left(-A'^{-1} ;\ \frac{\frac{\Delta k_2^2}{k_2-k_1}\binom{1}{-1}(\mathfrak{b}_2-\mathfrak{b}_1) - \check{A}'\mathfrak{b}_1}{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{A}'[\mathfrak{b}_1] - \det A'} ,\ (-)\frac{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{A}'[\mathfrak{b}_1] - \det A'}{\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathfrak{b}_1]} ;\right.
$$

$$
; \frac{\Delta\binom{1}{-1}\mathfrak{b}_1}{{}^t\mathfrak{b}_1\cdot\check{A}'(\mathfrak{b}_2-\mathfrak{b}_1)} ,\ (-)\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\cdot\frac{\{{}^t\mathfrak{b}_1\check{A}'(\mathfrak{b}_2-\mathfrak{b}_1)\}^2}{\check{A}'[\mathfrak{b}_1]\cdot\left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathfrak{b}_1]\right)} ;
$$

$$
\left.\left. ; -A\cdot(\mathfrak{p}+\mathfrak{r}) ,\ (-)A'^{-1}\cdot\left(\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\binom{\nu_1}{\nu_2}\right) ,\ D \right)\right\}
$$

となる。

この Lemma の (イ) 及び (ロ), (ハ) の場合が含まれるのは、[2] の Lemma 4, Lemma 5 に対応している。各 Ψ_{I} は [2] の Lemma 7 を使えば、誤差項を許して、Ψ_0 に似た形の三種の級数の和で表わす事が出来る。

4° 今 A を実対称行列として $k \geqq 0$ に対し A_k その他を次の如くに定める。

$$
\begin{cases}
A_0 \equiv A \mod 1 , \\
k \geqq 0 \text{ に対し } \det A_k \neq 0 \text{ なら } A_k^{-1} = R_k + A_{k+1} \\
\text{但し } R_k = \begin{pmatrix} \nu_1^{(k)} & \nu^{(k)} \\ \nu^{(k)} & \nu_2^{(k)} \end{pmatrix} \text{ は整数係数の対称行列}, \\
\qquad A_{k+1} \text{ は実対称行列}
\end{cases}
$$

として P_k, Q_k を

$$
P_k = R_k\cdot P_{k-1} + P_{k-2} \qquad P_0 = R_0 , \qquad P_{-1} = 1_n
$$

$$Q_k = R_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2} \qquad Q_0 = 1_h, \quad Q_{-1} = (0)_h$$

とし、以下 $\det P_k \neq 0$, $\det Q_k \neq 0$ は仮定する。又

$$\tilde{B}_k = A_k \cdots A_1 \quad (k \geq 1), \qquad \tilde{B}_0 = 1_h,$$

$$U_{k+1} = (\det Q_k) \cdot (A_0^{-1} - Q_k^{-1} P_k) \qquad (k \geq 0), \quad U_0 = (0)_h$$

とおき $\mathbb{P}^{(0)} = \mathbb{P}$, $\gamma^{(0)} = \gamma$ から始めて

$$\mathbb{P}^{(k+1)} = (-)\, A_k \cdot (\mathbb{P}^{(k)} + \gamma^{(k)}) \qquad (k \geq 0)$$

$$\gamma^{(k+1)} = (-)\, A_{k+1}^{-1} \cdot \left(\gamma^{(k)} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \end{pmatrix} \right) \qquad (k \geq 0)$$

とおく。$h \geq 3$ ならば ユニモデュラ行列で"傾ける操作"も追加すべきであろうが、ここでは略す。

(Lemma 4) $h = 2$ の時 $\| (\cdots) \|$ を行列のユークリッドのノルムとすれば

$$\| A_k \cdots A_0 \| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \| A_{k-1} \cdots A_0 \| \qquad (k \geq 1)$$

$$\| A_k \| \ll 1$$

となるように R_k を選ぶ事が出来る。

上記連分数展開を使い Lemma 3 の (0), (1) が順次適用出来る場合は (0) の右辺第1項の Ψ_I はお互に打ち消しあい、第2項の Ψ_{Σ} のみが残り、結局 $A_0, \cdots, A_k$ とずらしてゆけば、次のような"分岐型の反転公式"を得る。

[定理 2] $k \geq 0$ に対し (Lemma 3 の (0) (1) が反復適用出来る場合は)

$$\psi^{*}(A_0^{-1}\ ;\ \mathbb{b}_2,\ k_2\ ;\ \mathbb{b}_1,\ k_1\ ;\ \mathbb{P},\ \gamma,\ D)$$

$$\fallingdotseq \left|\det(A_{k+1}\cdots A_1)\right|^{-\frac{1}{2}} \times e\Big(\sum_{j=1}^{k+1}\tfrac{1}{2}A_j^{-1}[\gamma^{(j)}]\Big)\times$$

$$\times(\pm)\times e\big(\tfrac{1}{8}\times\{\text{整数}\}\big)\times$$

$$\times\psi_{I}\Bigg((-1)^{k+1}A_{k+1}^{-1}\ ;\ \begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\cdot\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\Delta\frac{k_2^2}{k_2-k_1}Q_k(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\mathbb{b}_1}{-\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]},$$

$$,\ (-)\frac{-\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}{\Delta^2\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\det Q_k-\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}\ ;$$

$$;\ \begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\times\frac{\Delta\frac{k_2}{k_2-k_1}(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\cdot Q_k^{(-)}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\mathbb{b}_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot{}^{t}(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\check{U}_{k+1}\cdot(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)-\det\tilde{B}_{k+1}},$$

$$,\ (-)\frac{\left\{\frac{k_2}{k_2-k_1}{}^{t}(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\cdot\check{U}_{k+1}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)-\det\tilde{B}_{k+1}\right\}^2}{\left(\frac{\Delta^2k_2^2}{k_2-k_1}\det Q_k-\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_1]\right)\left(\frac{1}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1]-\det\tilde{B}_{k+1}\right)};$$

$$;\ \mathbb{P}^{(k+1)},\ \gamma^{(k+1)},\ D\Bigg)$$

次頁迄続く

$$+(\pm)\cdot e\big(\tfrac{1}{8}\times\text{整数}\big)\times$$

$$\times\psi_{I}\Bigg((-)^{k+1}A_{k+1}^{-1}\ ;\ \begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\cdot\frac{\Delta\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}Q_k^{(-)}(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\mathbb{b}_2}{\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]},$$

(*) $\mapsto$

$$,\ (-)k_2\cdot\frac{\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]-\det\tilde{B}_{k+1}}{\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_2}{k_2-k_1}\left(k_1k_2\Delta^2\det Q_k-(k_2-k_1)\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2]-k_1\cdot\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]\right)};$$

$$;\ \begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\cdot\frac{\Delta\frac{k_2}{k_2-k_1}(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\cdot Q_k^{(-)}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}\ &-1\\ 1&\ \end{pmatrix}\mathbb{b}_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}{}^{t}(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\cdot\check{U}_{k+1}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)-\det\tilde{B}_{k+1}},$$

前頁から括弧続き

$$, \ (-)\,k_1 \frac{\left\{\frac{k_2}{k_2-k_1}\,{}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\,\check{\mathcal{O}}_{k+1}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1) - \det\tilde{B}_{k+1}\right\}^2}{\left(\frac{1}{k_2-k_1}\check{\mathcal{O}}_{k+1}[k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1]-\det\tilde{B}_{k+1}\right)\times\left(\text{前頁下の(*)の分母と同じ因子}\right)};$$

$$; \ \mathbb{P}^{(k+1)}, \ \gamma^{(k+1)}, \ D \Bigg)$$

$$+ (\pm) \times e\left(\tfrac{1}{8}\times(\text{整数})\right)\times$$

$$\times\, \psi_I\Bigg((-1)^{k+1}A_{k+1}^{-1}\,; \ (-)\frac{(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\Delta\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}Q_k(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)}{\check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}, \ (-)\frac{\check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}{\Delta^2\det Q_k};$$

$$; \ \frac{(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\Delta\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}Q_k\mathbb{b}_1}{{}^t\mathbb{b}_1\cdot\check{\mathcal{O}}_{k+1}\cdot(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)}, \ (-)\frac{\left\{{}^t\mathbb{b}_1\check{\mathcal{O}}_{k+1}(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\right\}^2}{\Delta^2\cdot\det Q_k\cdot\check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_1]};$$

$$; \ \mathbb{P}^{(k+1)}, \ \gamma^{(k+1)}, \ D\Bigg)$$

$$+ (\pm) \times e\left(\tfrac{1}{8}\times(\text{整数})\right)\times$$

$$\times\, \psi_I\Bigg((-1)^{k+1}A_{k+1}^{-1}\,; \ \begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}\cdot\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\Delta\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\cdot Q_k(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1) + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}\mathbb{b}_1}{-\det\tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]},$$

$$, \ (-)\frac{(-)\det\tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}{\Delta^2\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\det Q_k - \check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]};$$

$$; \ \begin{pmatrix} & -1\\ 1 & \end{pmatrix}\cdot\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\Delta\cdot Q_k\cdot\mathbb{b}_1}{{}^t\mathbb{b}_1\cdot\check{\mathcal{O}}_{k+1}\cdot(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)},$$

$$, \ (-)\frac{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\cdot\left\{{}^t\mathbb{b}_1\check{\mathcal{O}}_{k+1}(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\right\}^2}{\check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_1]\cdot\left(\Delta^2\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\det Q_k-\check{\mathcal{O}}_{k+1}[\mathbb{b}_1]\right)}; \ \mathbb{P}^{(k+1)}, \ \gamma^{(k+1)}, \ D\Bigg)$$

$$+ O(\log\cdot\text{因子})$$

となる。

定理1の右辺の $\Psi(\cdots)$ では $A' = A^{-1}$ $(R=(0))$ とすると Lemma 3 の(i) の場合になる。

5° Lemma 2 (いわゆる van der Corput 型) に相当する事も得られるがここには記さない。和をとる領域 $\mathcal{A}$ に強い制限をつけて Bruhat 分解を使うと式の複雑さは減ずる。
A が退化する時はまだ十分扱ってない。*)

[1] Y.-N. Nakai, On a θ-Weyl sum, Nagoya Math. J., Vol.52, 1973 163/172.

[2] 中井喜信, θ-Weyl 和, 数理解析研究所講究録 222号, 1974年, 10ページ分。

*) 短報は第2回日米セミナ報告集(ミシガン大学 1975年6月)にも所載。