数理解析研究所講究録
274巻 1976年 1-6

$|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|$の4乗平均について

名大 理 小林功武

Riemann zeta 関数の理論に於て，漸近式

$$(1) \quad \int_0^\infty |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^4 e^{-2\delta t}dt \sim \frac{1}{4\pi^2}\delta^{-1}\log^4\delta^{-1} \quad (\delta\to 0)$$

を求める一つの美しい方法が知られていて，それはE.C.Titchmarsh の著書 The theory of Riemann zeta function, Oxford (1951) p.p. 142 − 147 に詳しく述べられている所である．この方法は，$\zeta(\frac{1}{2}+it)^2$の値に対する近似表現式を何ら要求しない点に，その特徴乃至興味が存すると云えよう．用るのは (i) Mellin変換に関する Plancherel の定理，(ii) $\zeta(s)$の関数等式から容易に導かれる (E. Landau) 所の S. Wigert の近似関数等式，(iii) $\int_{2\pi}^\infty |\sum_{n\geq 1} d(n)e^{-nixe^{-i\delta}}|^2 dx$ の評価式等であるから方針としてはこの方法に全く従って，Dirichlet L 関数等の絶対値の4乗平均に関する周知の結果（の言い換え）：

$$(2) \quad \sum^*_{\chi \bmod q}\int_0^\infty |L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 e^{-2\delta t}dt \ll \varphi(q)(\sin\delta)^{-1}\log^4 q(\sin\delta)^{-1} \quad \begin{pmatrix}0<\delta\leq\pi/2, \\ q\geq 3\end{pmatrix}$$

が証明され得る筈である（(1) の如く，漸近式までは要求しないことにして）．吾らは，このような証明を試みて，結局 (2) より log-factor が 1 つ分悪い結果である

$$(3)\ \sum_{\chi \bmod q}^{*}\int_0^{\infty}|L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 e^{-2\delta t}dt \ll \varphi(q)(\sin\delta)^{-1}\log^5 q(\sin\delta)^{-1} \quad \begin{pmatrix} 0<\delta\le\pi/2, \\ q\ge 3 \end{pmatrix}$$

の極めて簡明な証明を得たので，その概略を述べてみたい．

以下，$q\geq 3$ なる整数 q，$0<\delta\leq\pi/2$ なる δ を固定し，次の記号を用る： $\lambda:=2\pi/q$; χ : q を法とする原始指標 ; $\tau(\chi):=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e^{2\pi ia/q}$, Gauss の和 ; $\varepsilon_\chi:=\tau(\chi)^2q^{-1}$, 従って, $|\varepsilon_\chi|=1$; $z:=xe^{i(\frac{\pi}{2}-\delta)}$ $(x>0)$; $\phi(z,\chi):=\sum_{n\geq 1}\chi(n)d(n)e^{-nz}$.

さて，(i) に対応する部分には何ら問題は無く，容易に次式が得られる：

$$(4)\ \sum_{\chi \bmod q}^{*}\int_0^{\infty}|L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^4 e^{-2\delta t}dt = \sum_{\chi \bmod q}^{*}\int_0^{\infty}|\phi(z,\chi)|^2dx + O\left(\sum_{\chi \bmod q}^{*}\int_0^{\infty}|\phi(x,\chi)|^2dx\right)$$

次に，(ii) に対応する部分は，“近似関数等式”ではなく，“正確な”関数等式を作らねばならない．即ち，

$$(5)\qquad E(w) \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\pi\Gamma(s)}{\sin\pi s}w^{-s}ds \qquad \left(|\arg w|<\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$V(w,\chi) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{n\geq 1}\chi(n)d(n)E(nw)$$

と定義すれば，“正確な”関数等式：

$$(6)\quad \varepsilon_\chi(\lambda/z)\phi(\lambda^2/z,\bar{\chi}) = -i\phi(z,\chi)+\frac{\chi(-1)}{\pi}V(z,\chi)+\frac{1}{\pi}V(ze^{-i\pi},\chi)$$

が成り立つことが $L(s,\chi)$ の関数等式から容易に証明されるので，これを用いることになる．

変数変換 $x \to \lambda^2/x$ から直ちに出る関係式：

$$\int_0^\lambda |\phi(z,\chi)|^2 dx = \int_\lambda^\infty \left|\varepsilon_\chi \frac{\lambda}{z} \phi\left(\frac{\lambda^2}{z}, \bar{\chi}\right)\right|^2 dx$$

に注意すると，(4)，(6) に拠り，吾々の結果 (3) は，若しも

$$(7) \quad \sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_\lambda^\infty |\phi(z,\chi)|^2 dx \ll \varphi(q)(\sin\delta)^{-1} \log^4 q (\sin\delta)^{-1} \qquad (0 < \delta \leq \pi/2),$$

$$(8) \quad \sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_\lambda^\infty |V(w,\chi)|^2 d|w| \ll q \log^5 q \qquad \left(\begin{array}{c} \arg w = \text{const.}, \\ -\pi \leq \arg w < \pi/2 \end{array}\right)$$

が示されるならば，明らかなこととなるし，(8) の右辺の因子 $\log^5 q$ を $\log^4 q$ で置き換えることができれば（事実としては，(8) の左辺は確かに $\ll q \log^4 q$ なのだが），(2) も証明されたことになる．

(iii) に対応するのが，即ち (7) であって，ζ 関数の場合のように，単純に項別積分して後に和を評価するという手法が使えず，最も工夫を要する処である．先ず，

$$(9) \quad \sum_{\chi \bmod q}^{*} |\phi(z,\chi)|^2 \leq \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| \sum_{n \geq 1} d(n) e^{-nz - 2\pi i n \frac{a}{q}} \right|^2$$

であり，$\{a/q \,;\, 1 \leq a \leq q,\ (a,q)=1\}$ の各点は mod 1 で少くとも $\frac{1}{q}$ 互に距っていることに注意しよう．然らば，次の一般的な補

題が証明されゝば十分である：

補題　$\{a_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{C}$, $a_n=O_\varepsilon(e^{\varepsilon n})$ for any $\varepsilon>0$; $\{y_r\}_{r=1}^{R}\subset\mathbb{R}$, 或る $\Delta\in(0,1]$ が存在して，$r\neq s$ ならば $\|y_r-y_s\|\geq\Delta$ とする．（但，$\|y\|=\mathrm{Min.}\{|y-m|;m\in\mathbb{Z}\}$）．$\delta\in(0,\pi/2]$ とし，$z=xe^{i(\frac{\pi}{2}-\delta)}$ と置くとき，

$$(10)\quad \sum_{r=1}^{R}\int_{2\pi\Delta}^{\infty}\Big|\sum_{n\geq 1}a_n e^{-nz-2\pi i n y_r}\Big|^2 dx \ll (\Delta\sin\delta)^{-1}\sum_{n\geq 1}\frac{|a_n|^2}{n}e^{-2\pi n\Delta\sin\delta}$$

実際，$a_n=d(n)$, $\{y_r\}_{r=1}^{R}=\{\frac{a}{q}\,;\,1\leq a\leq q,\,(a,q)=1\}$, $\Delta=\frac{1}{q}$ の場合に，$\sum_{n\geq 1}d(n)n^{-1}e^{-n/N}\ll\log^4 N\ (N\geq 2)$ を用いて，(10), (9) より (7) が従う．

(8) も亦，q への依存を問題とする吾々の立場からは，解かねばならぬ新しい課題であるが，それは比較的に簡単である：積分表示 (5) に於ける積分路を $(\frac{5}{2}\pm i\infty)$ 或は $(-\frac{1}{2}\pm i\infty)$ に遷すことにより明らかなように，$-\pi\leq\arg w<\pi/2$ であるならば，$\arg w$ につき十分すぎるくらい一様に，

$$(11)\qquad E(w)=1/w+O(1/|w|^2),$$

及び（$\arg w=\mathrm{const.}$）

$$(12)\quad \int_0^\infty|E(w)|^2 d|w|<\infty,\qquad (13)\quad \int_X^\infty|E(w)|^2 d|w|<X^{-1}\ (X\geq 1)$$

が成り立つから，単に $|\sum_{n\leq N}\chi(n)|\leq q$ から従う評価：

$\sum_{n>N}\chi(n)d(n)n^{-1}\ll qN^{-1/2}+q^2N^{-1}$ 及び $d(n)\ll n^{1/2}$ を用いるだけで，$V(w,\chi)=\sum_{n\leq q^3}\chi(n)d(n)E(nw)+O(q^{-1/2}|w|^{-1})$ を得て，

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*}\int_{\lambda}^{\infty}|V(w,\chi)|^2 d|w| \ll \sum_{\chi \bmod q}^{*}\int_{\lambda}^{\infty}\Big|\sum_{n\leq q^3}\chi(n)d(n)E(nw)\Big|^2 d|w| + O(q);$$

$V(w,\chi)$ を有限部分和で切るべく(11)を使いた為に，"Dirichlet 級数" $\sum_{n>N}\chi(n)d(n)n^{-1}$ が現われて来てしまったが，これは已むを得ない.(吾々の建前としては，Dirichlet 級数は，成る可く使いたくないのである！）とにかく，茲で，不等式

$$\Big|\sum_{n\leq q^3}\chi(n)d(n)E(nw)\Big|^2 \ll \log q\cdot\left\{\Big|\sum_{n\leq q}\chi(n)d(n)E(nw)\Big|^2+\sum_{j\geq 0}\Big|\sum_{2^j q<n\leq \mathrm{Min}\{2^{j+1}q,\,q^3\}}\chi(n)d(n)E(nw)\Big|^2\right\}$$

と，自明な一般公式：$\sum_{\chi \bmod q}^{*}\Big|\sum_{N<n\leq N'}\chi(n)c_n\Big|^2\ll\varphi(q)\left(1+\frac{N'-N}{q}\right)\sum_{N<n\leq N'}|c_n|^2$，並びに (12)，(13) を使って

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*}\int_{\lambda}^{\infty}|V(w,\chi)|^2 d|w| \ll \varphi(q)\log q\cdot\left\{\sum_{n\leq q}d(n)^2\int_0^\infty|E(nw)|^2 d|w|+\sum_{j\geq 0}2^j\sum_{2^j q}^{\mathrm{Min}\{2^{j+1}q,\,q^3\}}d(n)^2\int_{\lambda}^{\infty}|E(nw)|^2 d|w|\right\}$$

$$\ll\varphi(q)\log q\cdot\left\{\sum_{n\leq q}\frac{d(n)^2}{n}+\sum_{j\geq 0}2^j\sum_{2^j q}^{\mathrm{Min}\{2^{j+1}q,\,q^3\}}\frac{d(n)^2}{n}\frac{1}{n\lambda}\right\}\ll\varphi(q)\log q\sum_{n\leq q^3}\frac{d(n)^2}{n}\ll\varphi(q)\log^5 q,$$

即ち，(8) がこのように極めて単純素朴に出たのであるが，$\log^5 q$ の log-factor を一つ落とそうとすると，この素朴性は喪われて了いそうである.

結局，要点は吾々の補題に帰する；$\delta\to 0$ とした時の (2)の左

辺の変動を統制するのは，専ら(7)式だからである．講演では，吾らの補題の本質的部分であるδが微小の場合の証明を述べたのであるが，(10)は，巾級数形（Abel sum 型）の large sieve 不等式との精緻な比較研究を要求するものであり（その研究は未完なので），ここでは，稍ゝ技巧的に映るかも知れないその証明は叙べないことにしたい．

(2)と同値な

$$\sum_{\chi \bmod q}^{*} \int_{-T}^{T} |L(\tfrac{1}{2}+it, \chi)|^4 dt \ll \varphi(q) \log^4 qT \qquad (T \geq 2)$$

を導くに，$L(s,\chi)^2$に対する"近似函数等式"(Huxley, Lavrik)を用いる方法は，A. E. Ingham の系統に属すると云えようが，その意味で，吾らの証明は Titchmarsh の方法の系統に属す；これで，ζ函数につき知られていた従来の方法のL-函数の場合への適用が全て出揃った訳である．