

非線型確率微分方程式の解の積分表現

京大 理 物理ヲ | 中澤 宏

Kraichnan-Wyld 的 Formulation での乱流理論においては、  
 いわゆる Renormalized Perturbation expansion を求める多くの努力が  
 なされて来た。ここでは積分表現 (= Wiener-Hermite Expansion) が  
 1つの完成型としての Renormalized Perturbation Series を与えるこ  
 とを指摘し、その他に

- (1) 積分表現を確率微分方程式に応用するための基本的処  
 方の開発。
- (2) 実際応用上導入すべきいくつかの近似とその性質の一  
 般的議論。
- (3) 簡単な非線型確率微分方程式を例として解き、近似の  
 精度を定常分布に拘る諸平均値の厳密値との比較及  
 び数値実験による Power Spectrum との比較、によりて評  
 価。
- (4) Fourth Cumulant Discard 近似と積分表現の最近近似とは、非

線型項が奇数次のベキのみから成る場合には一致し、  
偶数次ベキがあれば一致しないこと。

(5) *Equivalent Linearization* と積分表現の最低近似との一致。  
等が論じられた。これらの詳細に関しては *Prog. Theor. Phys.* に投稿中であるので、あまゝいはい、かなりの Space を必要とし、ここに読するのは実際的でないので、省略し、次のような補足的説明のみと記す。

### § 1. 積分表現

確率変数  $v$  がある white noise  $f(t)$  :

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = \delta(t-t')$$

の functional であり、条件  $\langle v^2 \rangle$  が有限；を満たすときには、kernels と呼ばれる 1 組の deterministic 関数  $\{K_n(t_1, \dots, t_n); n=0, 1, \dots\}$  が存在して

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) G_n(t_1, \dots, t_n)$$

と表現される。ここで  $G_0 \equiv 1$ ,  $G_1(t_1) \equiv f(t_1)$ ,  $G_2(t_1, t_2) \equiv f(t_1)f(t_2) - \delta(t_1-t_2)$ , ... である。無限和は次の意味で  $v$  に収束する：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle (v - \sum_{n=0}^N \int \dots \int K_n G_n)^2 \rangle = 0.$$

積分表現の  $m$  次、 $n$  次の項は 2 次平均ノルムの意味の内積  $(A, B) \equiv \langle AB \rangle$  に関して直交している：

$$\left( \int \dots \int K_m G_m, \int \dots \int K_n G_n \right) = \delta_{mn} n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n^2(t_1, \dots, t_n).$$

これから直ちに公式:  $\langle v^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|K_n\|^2$ ,  $\langle v \rangle = K_0$ , が得られる。但し  $\|\cdot\|$  は通常の  $L_2$  ノルムである。確率微分方程式

$$dx/dt = A(x) + \sigma f(t),$$

但し  $x$  は一般に多成分でよく,  $A(x)$  は  $x$  ( $n$  成分) の多項式, の形のものを,  $x(t)$  は明らかに  $f(t')$  ( $s \leq t' \leq t$ , 但し  $s$  は初期時刻) の関数であるので,  $x(t)$  の積分表現は

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \cdots \int_s^t dt_n K_n(t; t_1, \dots, t_n) G_n(t_1, \dots, t_n)$$

の形でなければならぬ。従ってこれと元の確率微分方程式に代入し,  $K_0, K_1, \dots$  を決定すれば, それらによって  $x(t)$  に関する必要な情報が次式で与えられる:

$$\langle x(t) \rangle = K_0(t),$$

$$\langle x(t) x(t') \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_s^{\min(t, t')} dt_1 \cdots \int_s^{\min(t, t')} dt_n K_n(t; t_1, \dots, t_n) K_n(t'; t_1, \dots, t_n).$$

## § 2. 参考文献

1. Cameron and Martin, Ann. Math. 88: 385 (1947).
2. Itô, J. Math. Soc. Japan 3: 157 (1951).
3. Wiener, "Homogeneous Chaos", Amer. J. Math. 60: 897 (1938).
4. Nisio, J. Math. Soc. Japan 12: 207 (1960).
5. McKean, "Stochastic Differential Equations," Proceedings of a Symposium in Applied Mathematics of AMS and SIAM (Keller and McKean, eds.,

(1973), p. 197.

### §3. 積分表現における近似について

例之ば方程式  $dx/dt = -\gamma x - \lambda x^3 + \sigma f(t)$  では、短い時間  $\Delta t$  の間での  $x(t)$  の increment は  $\Delta x \sim -(\gamma x + \lambda x^3)\Delta t + \sigma f(t)\Delta t$  で与えられる。  $\langle f(t)f(t') \rangle = \delta(t-t')$  からは  $f(t)$  の order を評価すること困難であるが、  $\int_t^{t+\Delta t} f(t') dt' \equiv \Delta B(t)$  と考えると、  $\langle (\Delta B(t))^2 \rangle = \Delta t$  であり、従って  $\Delta B(t) \sim O(\sqrt{\Delta t})$  と考えてよい。従って  $\Delta t$  が小さいならば、  $\Delta x$  の主要部は  $f(t)\Delta t \equiv \int_t^{t+\Delta t} f(t') dt' \equiv \Delta B(t)$  から成り立っている。次にこれが非線型の  $x^3$  等を通じて積分され、  $f(t)$  の 2 次・3 次... の量が登場して来る。この picture は  $x(t)$  の擾動展開の底にあるものであり、同時にその有効性が short time に限られることを示唆している。

積分表現による解法では、方程式の右辺、特に上の例では  $x^3(t)$ 、を再び積分表現に書き、2 次平均ノルムの意味で互いに直交する（相関のない）ものの和に分解しておき、各次の部分空間毎に左右両辺が等しいことを要請する。実際には積分表現の kernel としてはじめの  $n$  個しかとれないから、このような要請を近次の方の  $n$  個の部分空間でしか満たすことができない。しかし  $x(t)$  の順次の積を作るとき、この  $n$  個の部分空間から一度は外に出るが、最後に 0 次  $\sim (n-1)$  次空間

に戻す項はすべて取り入れた形で方程式が構成される。例え  
ば  $x(t) \sim K_0(t) + \int_s^t K_1(t; t_1) G_1(t_1) dt_1 \equiv K_0 + K_1 G_1$  のように近似す  
るとき、 $x^2(t) \cong \{K_0^2 + \|K_1\|^2\} + \iint K_1(t; t_1) K_1(t; t_2) G_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$  のよ  
うに 0次と 2次の項しか出ない。この  $K_1, K_1, G_2$  の項は、例え  
方程式の右辺に  $x^2(t)$  の項がある場合でも、実際に解く ker-  
nel の方程式には入って来ない。したがって  $x^2(t)$  を作り  
と、 $(\underset{\substack{\uparrow \\ x^2(t) \text{の}}} {K_1, K_1, G_2}) \times (\underset{\substack{\uparrow \\ x(t) \text{の}}} {K_1, G_1}) = 2\|K_1\|^2 K_1 G_1 + \iint K_1(t; t_1) K_1(t; t_2) K_1(t; t_3) G_3(t_1,$

$t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$  の形となり、再び 1次の項が生じる。このよ  
うな項はすべて、この近似において、捨てることになる。  
結果として  $K_0(t)$  と  $K_1(t; t_1)$  について、Hartree-Fock 的 self-  
consistent equation が得られる。