

## 乱流の多重尺度キュムラント展開理論

## — 乱流場の相似則 —

京大理学部 巽 友正  
相模工大数理 水島二郎  
京大数理研 木田重雄

## §1. はじめに

我々はすでに多重尺度キュムラント展開理論を Burgers 乱流<sup>1)</sup> および三次元 Navier-Stokes 乱流<sup>2)</sup> に適用し、興味ある結果を得たことを報告した。特に Navier-Stokes 乱流については Kolmogorov の  $-5/3$  乗エネルギースペクトルを得、またエネルギー減衰法則、skewness 等についても実験と良く合う結果を得た。

今回は、Navier-Stokes 乱流に多重尺度キュムラント展開を適用して、数値計算を行なった結果、エネルギースペクトルに著しい相似則が存在すること、およびこの相似則は非定常乱流に拡張された Kolmogorov の理論と合致することを示す。

## §2. エネルギースペクトル方程式

無限領域を占める非圧縮流体中における一様な乱流場は、乱流速度の特性汎関数を用いて表現できる。特性汎関数重は、速度場のフーリエ成分  $v(k)$  と、 $z^*(k) = z(-k)$  (\*は複素共役を示す) を満たす任意のベクトル場  $z(k)$  を用いて、

$$\Phi[z(k), t] = \langle \exp[i \int z(k) \cdot v^*(k, t) dk] \rangle \quad (2.1)$$

で定義される。ここに、 $\langle \quad \rangle$  は  $v(k)$  の確率分布についての平均を表わす。特性汎関数重の時間的变化は、次の汎関数方程式によって決定される。<sup>3)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nu \int k^2 z_i(k) \frac{\delta \Phi}{\delta z_i(k)} dk \\ = \iint (k_k + k'_k) \Delta_{ij}(k+k') z_i(k+k') \frac{\delta^2 \Phi}{\delta z_k(k) \delta z_j(k')} dk' dk. \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここに、

$$\Delta_{ij}(k) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (2.3)$$

また、 $\delta/\delta z_i(k)$  は汎関数微分を意味する。

特性汎関数の対数を  $z$  についてテイラー展開したとき、

$$\begin{aligned} \ln \Phi[z(k), t] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \cdots \int C_{l_1 \dots l_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; t) \\ \times z_{l_1}(k_1) \cdots z_{l_n}(k_n) dk_1 \cdots dk_n, \end{aligned} \quad (2.4)$$

係数  $C^{(n)}$  を速度の  $n$  次キュムラントという。明らかに,

$$C_{l_1 \dots l_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; t) = i^{-n} \left[ \frac{\delta^n \ln \Phi}{\delta z_{l_1}(k_1) \dots \delta z_{l_n}(k_n)} \right]_{z=0} \quad (2.5)$$

の関係がある。

(2.1) 式から  $n$  次のキュムラントに関する方程式を作る

と、

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu \sum_{m=1}^n (k_m^2) \right) C_{l_1 \dots l_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n; t) \\ &= i \sum_{m=1}^n \Delta_{l_m j} (k_m) (k_m)_k \times \\ & \times \int C_{l_1 \dots l_{m-1} k l_{m+1} \dots l_n j}^{(n+1)}(k_1, \dots, k_{m-1}, k_m - k', k_{m+1}, \dots; k_n, k'; t) \\ & \times dk' - i \sum_{r=2}^{n-2} \frac{1}{(r-1)!(n-r+1)!} \overline{\sum_{(1, \dots, n)}} \sum_{m=r}^n \Delta_{l_m j} (k_m) (k_m)_k \times \\ & \times \int C_{l_1 \dots l_{r-1} j}^{(r)}(k_1, \dots, k_{r-1}, k'; t) \times \\ & \times C_{l_r \dots l_{m-1} k l_{m+1} \dots l_n}^{(n-r+1)}(k_r, \dots, k_{m-1}, k_m - k', k_{m+1}, \dots, k_n; t) dk' \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。ただし、 $\overline{\sum_{(1, \dots, n)}}$  は  $n$  個の数  $1, \dots, n$  から作られるあらゆる異なった順列にわたっての和である。

特に、二次・三次のキュムラントについての方程式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(k_1^2 + k_2^2) \right] C_{l_1 l_2}^{(2)}(k_1, k_2; t) \\ &= i \sum_{(1, 2)} \Delta_{lij}(k_1) (k_1)_k \int C_{k l_2 j}^{(3)}(k_1 - k', k_2, k'; t) dk', \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nu(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \right] C_{l_1 l_2 l_3}^{(3)}(k_1, k_2, k_3; t) \\ &= i \sum_{(1, 2, 3)} \Delta_{lij}(k_1) (k_1)_k \int \left[ \frac{1}{2} C_{k l_2 l_3 j}^{(4)}(k_1 - k', k_2, k_3, k'; t) \right. \\ & \quad \left. - C_{k l_2}^{(2)}(k_1 - k', k_2; t) C_{l_3 j}^{(2)}(k_3, k'; t) \right] dk' \end{aligned} \quad (2.8)$$

である。

(2.6)式から明らかのように $n$ 次のキュムラントを支配する方程式には $(n+1)$ 次のキュムラントが含まれており、この方程式系は閉じていない。

「四次のキュムラントをゼロと置き、三次のキュムラントの時間スケールが、二次のキュムラントの時間スケールに比べて小さい」(多重尺度キュムラント展開)と仮定し、(2.8)式を初期条件

$$C_{l_1 l_2 l_3}^{(3)}(k_1, k_2, k_3; 0) = 0 \quad (2.9)$$

のもとで、時間について積分すると、

$$C_{l_1 l_2 l_3}^{(3)}(k_1, k_2, k_3; t) = -i \frac{1 - \exp[-\nu(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)t]}{\nu(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)} \times$$

$$\times \sum_{(1,2,3)} \Delta_{lij}(k_1)(k_1)_{k'} \int C_{k_2}^{(2)}(k_1-k', t_2; t) \cup_{lij}^{(2)}(k_2, k'; t) dk' \quad (2.10)$$

が得られる。一様・等方的な乱流の場合には、二次のコモラントはエネルギー・スペクトル密度  $\phi$  を用いて、

$$C_{l_1 l_2}^{(2)}(k_1, k_2; t) = \phi(k, t) \Delta_{l_1 l_2}(k_1) \delta(k_1 + k_2) \quad (2.11)$$

のように表わされ、 $\phi$  を支配する方程式は (2.7), (2.10) 式から次のように導かれる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) \phi(k, t) = \psi(k, t) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \psi(k, t) = & 4\pi \int_0^\infty dk' \int_{-1}^1 \frac{1 - \exp[-\nu(k^2 + k'^2 + k'^2)t]}{\nu(k^2 + k'^2 + k'^2)} \times \\ & \times [\phi(k', t) - \phi(k, t)] \phi(k', t) \left(\frac{k k'}{k'^2} + \mu\right) k k'^3 (1 - \mu^2) d\mu, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ただし、

$$\mu = \frac{k'^2 - k'^2 - k^2}{2kk'} \quad (2.14)$$

エネルギー・スペクトル関数  $E(k, t)$  および単位質量当りのエネルギー  $\mathcal{E}(t)$  は、それぞれ  $\phi$  を用いて次のように表わされる。

$$E(k, t) = 4\pi k^2 \phi(k, t), \quad (2.15)$$

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \int_0^\infty E(k, t) dk = 4\pi \int_0^\infty k^2 \phi(k, t) dk. \quad (2.16)$$

### §3. 数値計算

連立方程式(2.12), (2.13)式の数値計算を, 次の二つの初期条件について行なった。

$$(I) \quad \phi(k, 0) = \frac{4\pi E_0}{k_0^2} e^{-k^2/k_0^2}, \quad (3.1)$$

$$(II) \quad \phi(k, 0) = \frac{4\pi E_0}{k_0^2} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 e^{-k^2/k_0^2}. \quad (3.2)$$

計算は  $R = E_0^{1/2} / \nu k_0^{3/2} = 5, 10, 20, 100, 200, 400, 800,$   
 $\tau = E_0^{1/2} k_0^{3/2} t = 0 \sim 8$  の範囲で行なった。主な結果は次の通りである。

#### 3-1. エネルギー減衰則

単位質量当りのエネルギー  $\mathcal{E}(t)$  は, 高レイノルズ数 ( $R \geq 100$ ) では,  $\tau \geq 4$  の時刻において,

$$(I) \quad \mathcal{E}(t) \propto t^{-1.2} \quad (3.3)$$

$$(II) \quad \mathcal{E}(t) \propto t^{-1.4} \quad (3.4)$$

というべき法則に従って減衰することがわかった。<sup>2)</sup>

### 3-2. エネルギースペクトル

高波数領域におけるエネルギースペクトル  $E(k, t)$  の形は、高レイノルズ数 ( $R \geq 100$ ) においては、初期条件に依らない普遍的な形をとることが見い出された。それは三つの部分領域から成り立っている。すなわち、低波数側から、

(i)  $E(k, t) \propto k^{-5/3}$ , (ii)  $E(k, t) \propto k^{-1}$ , (iii)  $E(k, t) \propto \exp(-k^{1.5})$ , の形をしている (図1参照)。 (i) は Kolmogorov のスペクトル, (ii) は 0-4 次キエムラント方程式の非粘性の極限における漸近解<sup>4)</sup>であり、また、乱流を渦糸の集まりとみずれたときに乱流のもつスペクトルの形である。 (iii) は新しい結果であり、純粹な粘性解  $\exp(-k^2)$  でないことに注意したい (図2は  $\log E$  を  $k^{1.5}$  の関数として示す。直線は、 $E(k, t) \propto \exp(-k^{1.5})$  を示す)。これは、充分高い波数領域においても非線型項が無視できないことを示している。

### 3-3. 相似則

異なった時刻およびレイノルズ数に対するエネルギースペクトルの形を詳細に比較してみると、高レイノルズ数 ( $R \geq 100$ ) においては、低波数側 (エネルギー領域) と高波数側 (普遍領域) のそれぞれに、互いに異なった二種類の相似則が存在することが分る。もし、エネルギースペクトルに、

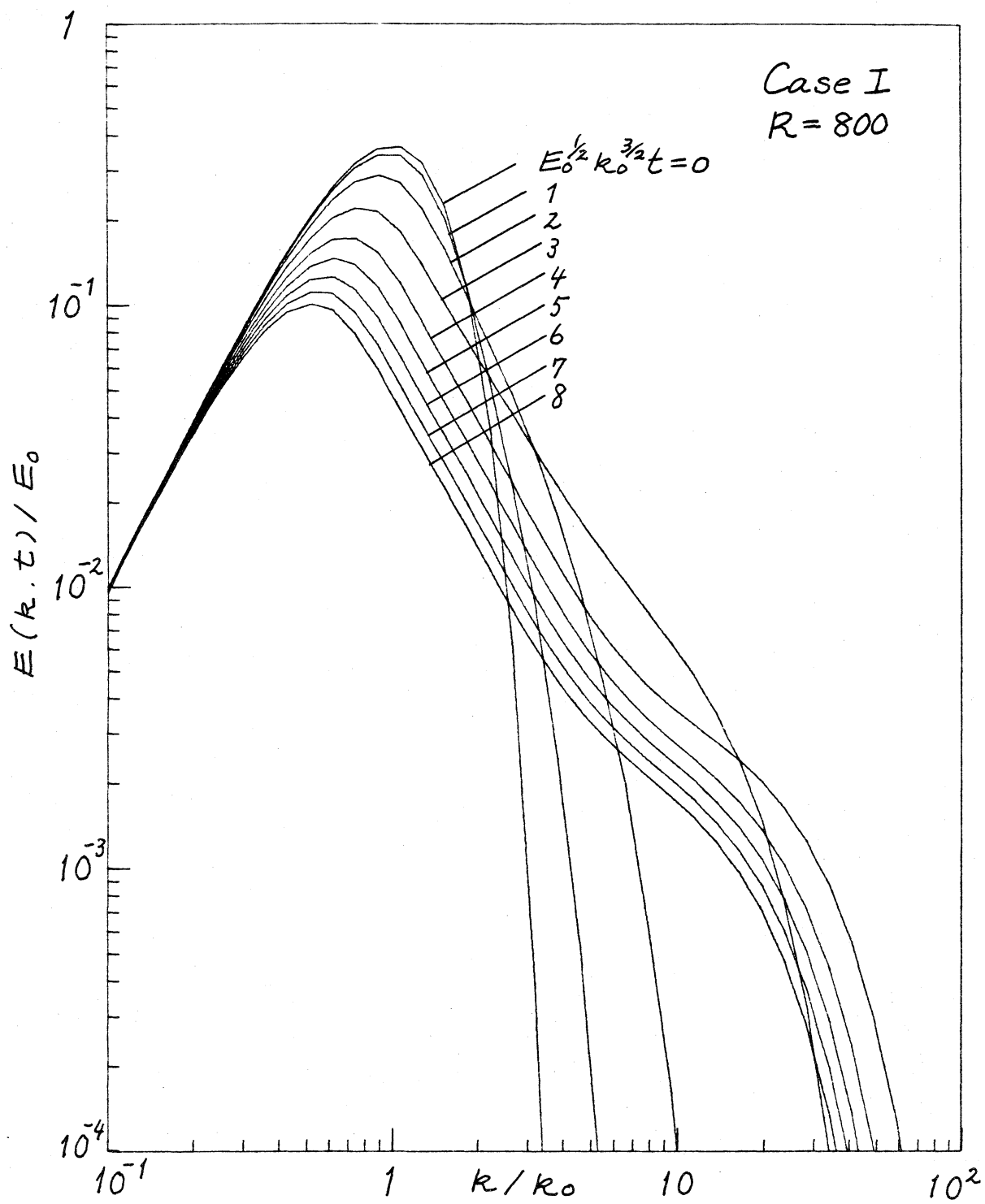


图 1-a



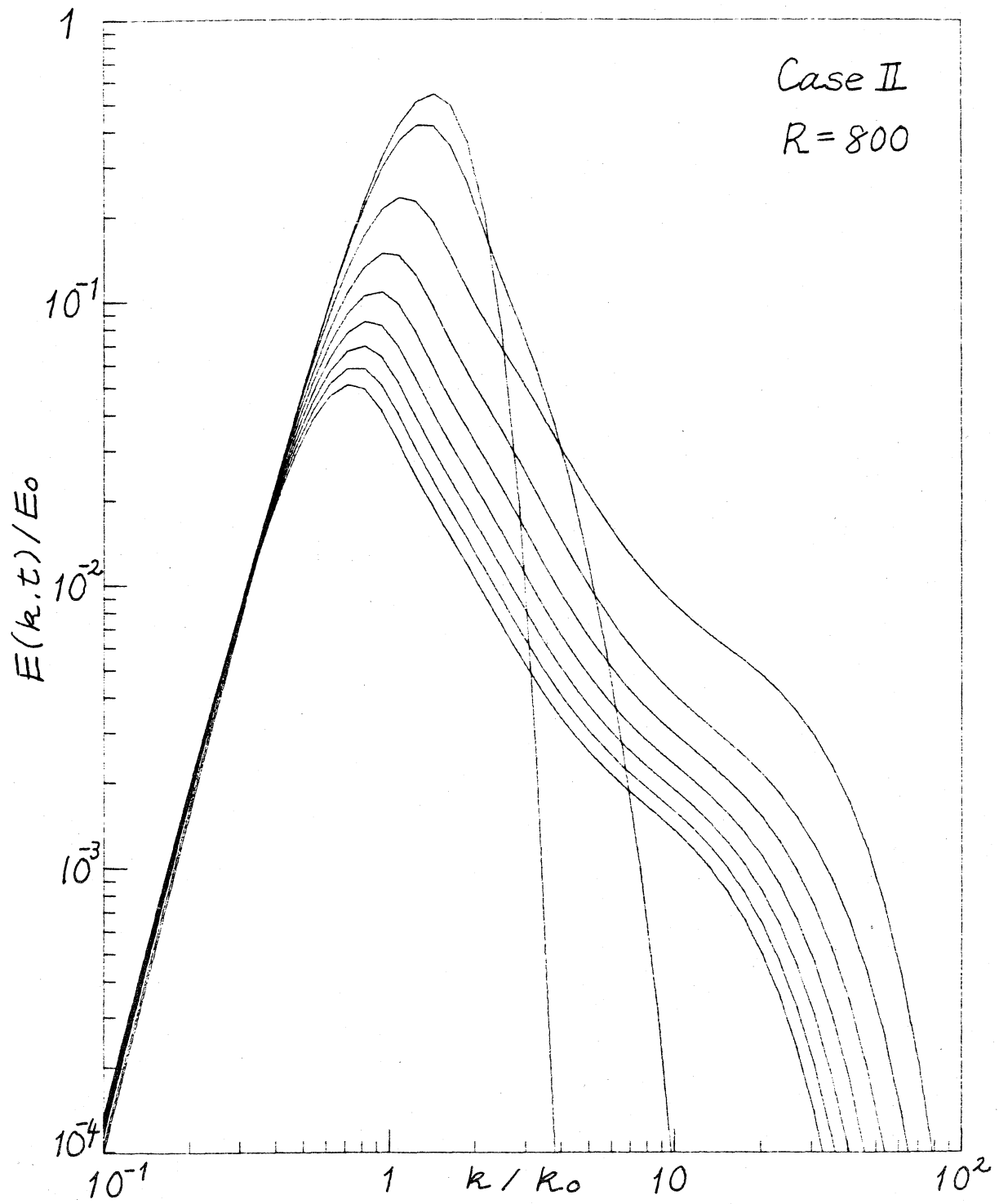


图 1-b

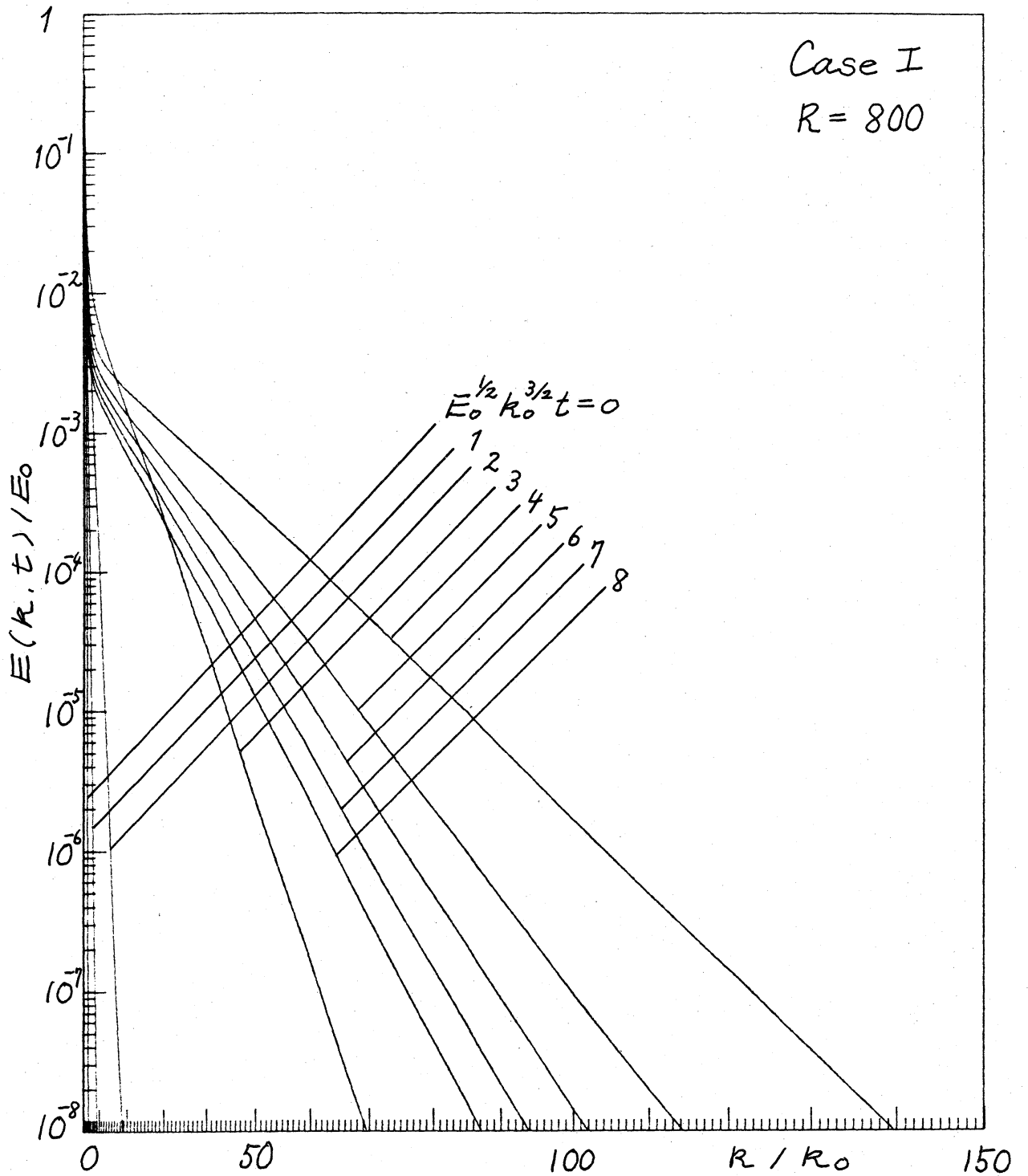


图 2 - a

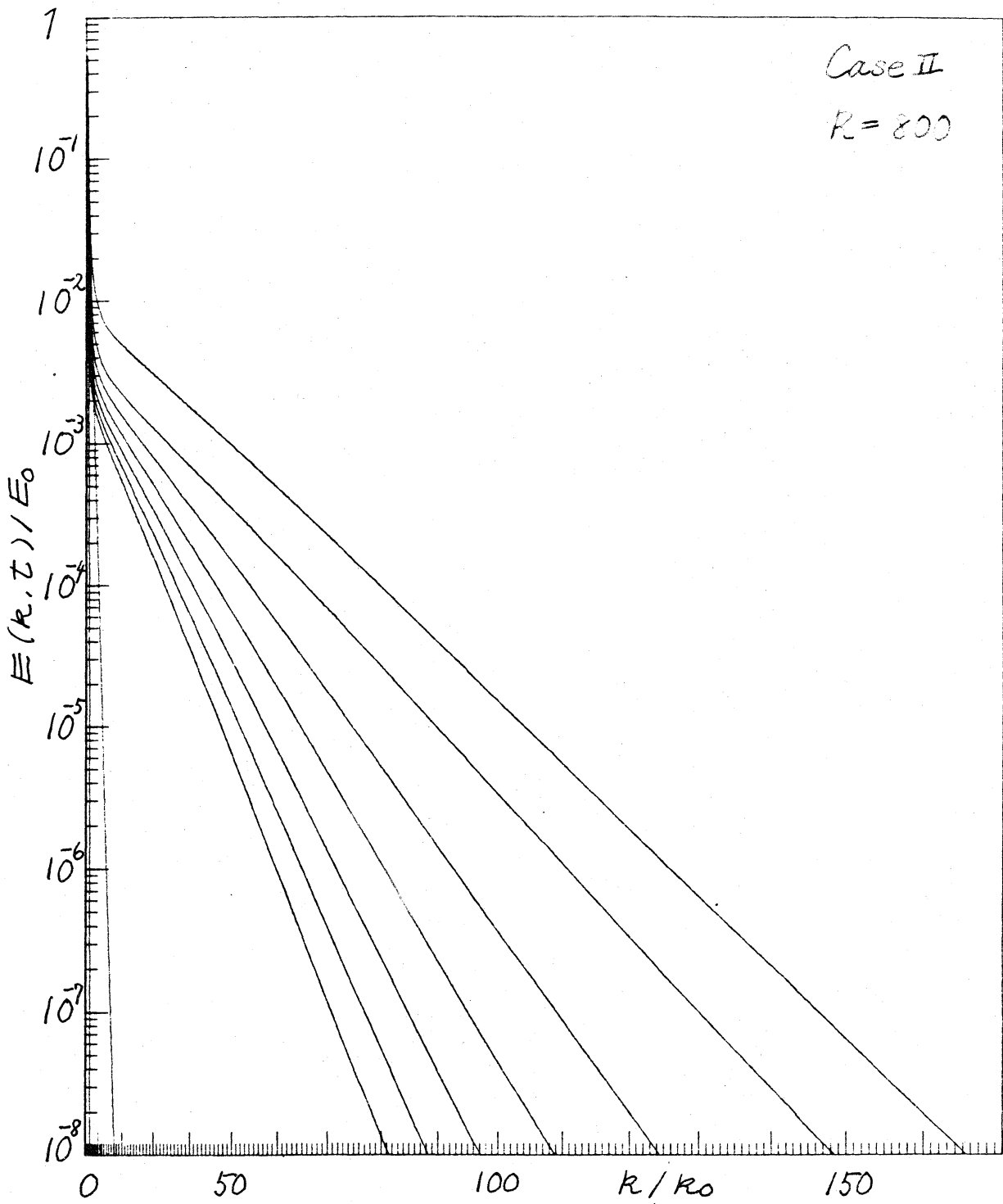


图 2-b

$$E_i(k, t) = R^{-\alpha_i} t^{-\beta_i} f_i(R^{\alpha_i} t^{\beta_i} k), \quad (i=1, 2) \quad (3.5)$$

( $i=1$  はエネルギー領域,  $i=2$  は普遍領域を指すものとする) なる相似則が存在すれば、両対数表示で描かれた異なった  $R$  および  $t$  に対するエネルギースペクトル  $E(k, t)$  は、単なる平行移動によって互いに重ね合わせることができ。実際に、われわれの数値計算の結果得られたグラフを平行移動して重ね合わせられたエネルギースペクトルの様子は、エネルギー領域については図3に、普遍領域については図4に示してある。異なった時刻およびレイノルズ数に対するエネ

$E(k, t)/E_1(t)$

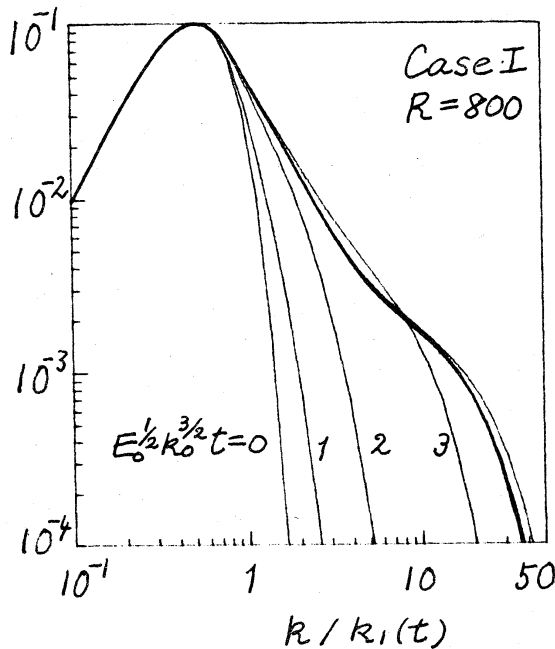


図3-a

$E(k, t)/E_1(t)$

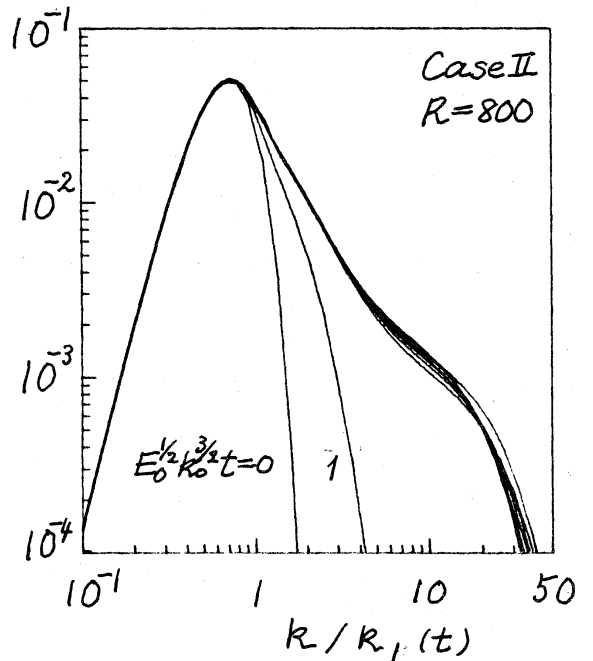


図3-b

$$E(k, t) / E_2(R, t)$$

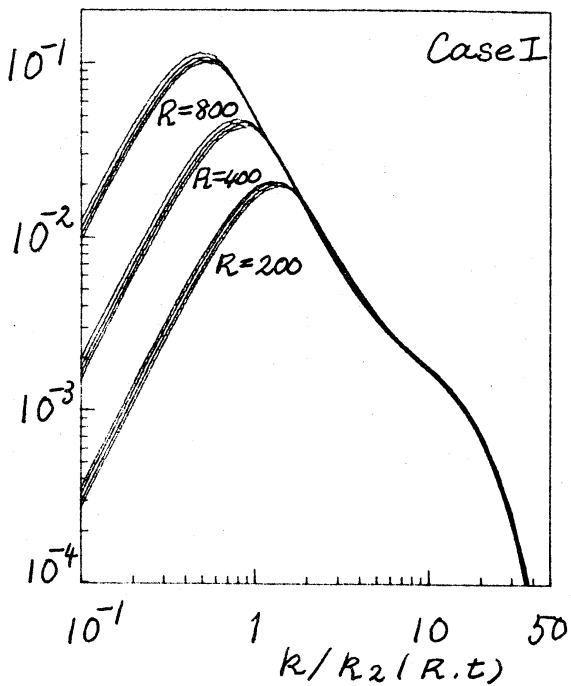


図 4-a

$$E(k, t) / E_2(R, t)$$

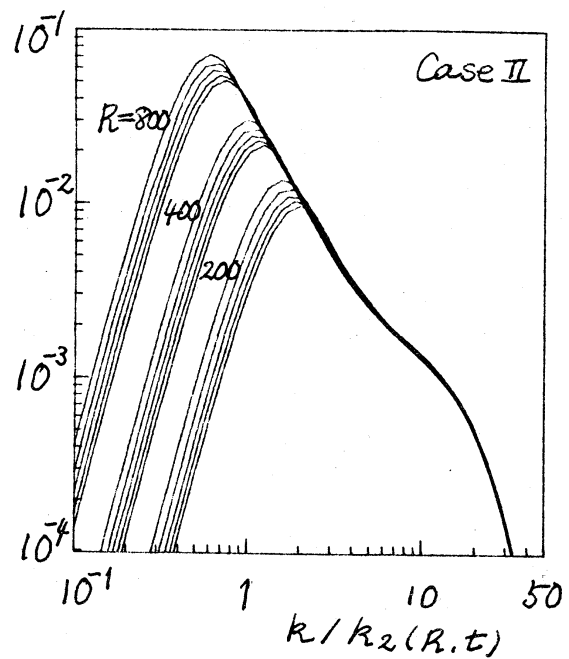


図 4-b

ルギースペクトルが平行移動によって極めて良く一致していることがわかる。それは (3.5) の形の相似則が極めて良く成り立っていることを意味している。ところで、指数  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\nu_i$  はこの平行移動の移動距離から求めることができ、得られた値は表 1 に示されている。

これらの値から 3-1 で述べたエネルギー減衰法則が次のように導かれる。単位質量当りのエネルギー  $\mathcal{E}(t)$  はエネルギースペクトルのエネルギー領域からの寄与でほとんど決定されてしまうから、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(t) &= \int_0^\infty E(k, t) dk = R^{-\alpha_1} t^{-\beta_1} \int_0^\infty f_1(R^{\beta_1} t^{\delta_1} k) dk \\
 &\approx R^{-(\alpha_1 + \beta_1)} t^{-(\beta_1 + \delta_1)} \int_0^\infty f_1(s) ds
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

と書ける。表1の指数を用いると、

$$\mathcal{E}(t) \propto \begin{cases} R^0 t^{-1.2}, & \text{(I)} \\ R^0 t^{-1.4}, & \text{(II)} \end{cases} \tag{3.7}$$

となるが、これは3-1で述べた減衰法則と完全に一致している。

#### §4. 非定常乱流へのKolmogorov理論の拡張

前節では数値計算で得られたエネルギースペクトルに相似則が存在することを述べた。この節ではKolmogorovの理論を非定常乱流に拡張することにより、相似則の指数を理論的に導き出してみよう。

数値計算の結果は、(i)高波数領域においてKolmogorovの $-5/3$ スペクトルが存在すること、(ii)低波数の領域におけるスペクトルは初期に与えられた形を保ち、時間的には不変であること(図1参照)、(iii)低波数側のスペクトルは $R$ によらないこと( $\alpha_1=0, \beta_1=0$ 。表1参照)、を示している。これらの事実を基礎として相似則を考えてみよう。

(i)はKolmogorovの普通平衡理論が成り立っているであら

う二とを暗示している。Kolmogorovは、普遍平衡領域においてエネルギースペクトルが、

$$E(k) = R^{-5/4} \epsilon^{1/4} f(R^{3/4} \epsilon^{-1/4} k) \quad (4.1)$$

の形をとる事を示した。ここで $f$ は普遍関数、 $\epsilon$ はエネルギー伝達率が時間的に一定である。われわれはこれを減衰乱流に拡張するために、エネルギー伝達率 $\epsilon$ を時間の関数とみず、普遍領域においてスペクトルが、

$$E(k, t) = R^{-5/4} \epsilon(t)^{1/4} f_2(R^{3/4} \epsilon(t)^{-1/4} k) \quad (4.2)$$

の形をしていると考える。ここで

$$\epsilon(t) = -\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} E(k, t) dk. \quad (4.3)$$

慣性領域においては、スペクトルが $R$ に依存しないことから、

$$E(k, t) = K \epsilon(t)^{2/3} k^{-5/3} \quad (4.4)$$

となる(事実(iii)を考慮した)。ここで、 $K$ は定数でKolmogorov constantと呼ばれている。

さて、低波数の極限におけるエネルギースペクトルの形を $E(k, t) \propto k^a$  (事実(iii)により、 $a$ は時間的に一定)とすれば、エネルギースペクトルの様子は模式的に図5のように

なる。

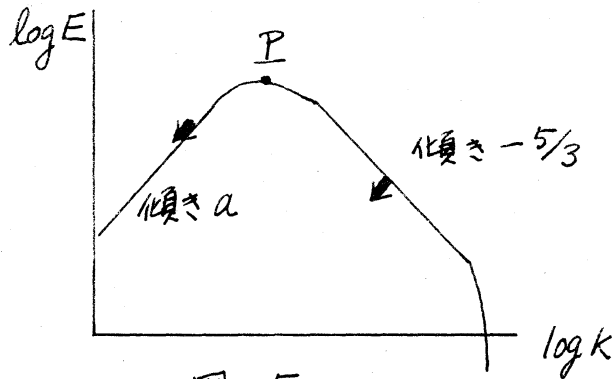


図 5

曲線は図の矢印の方向へ移動するが、その移動速度から指数  $\alpha_i, \beta_i, \rho_i, \nu_i$  を決定する = とができる。いま、

$$\mathcal{E}(t) \propto t^{-p} \quad (4.5)$$

とすると、(4.3) から

$$\mathcal{E}(t) \propto t^{-(p+1)} \quad (4.6)$$

(4.2)式から、高波数領域のスペクトルは  $(-\frac{p+1}{4}, -\frac{p+1}{4})$  の速度で左下方へ移動する = とがわかる。一方、低波数領域のスペクトルの傾き  $a$  は時間的に不変であるから、図の頂点  $P$  は  $(-2(p+1)/(3a+5), -2a(p+1)/(3a+5))$  の速度で左下方へ移動する。従って、全エネルギー  $\mathcal{E}(t)$  は、

$$\mathcal{E}(t) \propto t^{-2(a+1)(p+1)/(3a+5)} \quad (4.7)$$



のように変化する(頂角Eの縦横の移動速度の和が $\alpha$ の指数になる)。 (4.5), (4.7)式を比較して、

$$p = \frac{2(a+1)}{a+3} = \begin{cases} 1.2, & (\text{I. } a=2) \\ 10/7 = 1.43, & (\text{II. } a=4) \end{cases}$$

が得られる。これは数値計算の結果の(3.3), (3.4)式と完全に一致している。また、指数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ は $p$ から直ちに計算でき、その値は表2に示してある。結果は表1にあげた数値計算の結果と良く一致していることがわかる。

表 1

|          | Case I<br>エネルギー領域 | 普遍領域  | Case II<br>エネルギー領域 | 普遍領域  |
|----------|-------------------|-------|--------------------|-------|
| $\alpha$ | 0.00              | 1.23  | 0.00               | 1.23  |
| $\beta$  | 0.80              | 0.56  | 1.09               | 0.59  |
| $\gamma$ | -0.01             | -0.73 | -0.01              | -0.72 |
| $\delta$ | 0.40              | 0.53  | 0.30               | 0.59  |

表 2

|          | Case I<br>エネルギー領域 | 普遍領域           | Case II<br>エネルギー領域 | 普遍領域           |
|----------|-------------------|----------------|--------------------|----------------|
| $\alpha$ | 0.0               | $5/4 = 1.25$   | 0.0                | $5/4 = 1.25$   |
| $\beta$  | $4/5 = 0.8$       | $1/20 = 0.05$  | $8/7 = 1.14$       | $17/28 = 0.61$ |
| $\gamma$ | 0.0               | $-3/4 = -0.75$ | 0.0                | $-3/4 = -0.75$ |
| $\delta$ | $2/5 = 0.4$       | $1/20 = 0.05$  | $2/7 = 0.29$       | $17/28 = 0.61$ |

## 参考文献

1. 葵, 木田, 水島 1975 数理研講究録 244 104
2. 葵, 水島, 木田 1975 第7回乱流シンポジウム 49
3. Hopf, E. 1952 J. Rat. Mech. Anal. 1, 89
4. Tatsumi, T. 1960 Rev. mod. phys. 32, 807