数理解析研究所講究録
276巻 1976年 56-70

Isometryによって不変な閉測地線について

東工大 理　田中 実

§1. 序文

コンパクトなリーマン多様体上の閉測地線の数を、調べることは興味ある問題である。この問題に関して、Gromoll と Meyer（[2]）によって得られた定理がある。

<u>Theorem</u>.（Gromoll, Meyer）　Mを単連結なコンパクトリーマン多様体とする。Mの free loop space のベッチ数から作られる数列が有界でないならば、M上には、閉測地線が無限に存在する。

この定理より、以下の問題を考えつく。

<u>問題</u>.　h を単連結、コンパクトなリーマン多様体M上の isometry とする。もし、空間 $C^0(M,h)=\{\gamma:[0,1]\to M \,/\, \gamma$ は、$h(\gamma(0))=\gamma(1)$ を満たす連続な曲線$\}$ のベッチ数からなる数列が有界でないならば、h で不変な測地線は無限に存在するか？

ここで、測地線$\gamma : \mathbb{R} \to M$が$h$で不変だとは、勝手な$t$に対して、$h(\gamma(t)) = \gamma(t+\theta)$となる定数$\theta\,(\geq 0)$が存在する時に言う。$h$がinvolutive ($h^2 = id.$) である時、Grove[6]によって、さらに$h$が素数のorderのisometryに対しては著者[9]により、それぞれ肯定的に解決された。1974年末にGroveは素数のベキorderのisometryに対しても成り立つことを主張した。（しかしながら、彼の証明には、不完全な点があることが、後に著者により指摘された。）その後、すぐに著者により独立に、それが解決された。([10]) 本論文において、有限のorderをもつisometryに対しても成り立つことを示す。

Main theorem. Mをコンパクト、単連結なリーマン多様体とし、fをM上のisometryで、有限のorderをもつとする。もし、$C^0(M, f)$のベッチ数からなる数列が、非有界ならばfで不変な閉測地線が無限に存在する。

注1. Cor.として、Gromoll-Meyerの定理の閉測地線の存在よりも、多様体によっては、さらに詳しい結果が得られる。つまり、恒等写像id.とhomotopicなcyclicな勝手なisometry fに対して、fで不変な閉測地線も無限に存在する。

注2. M. Vigué-Poirrier と D. Sullivan [8] により以下の2つの性質が同値であることが示されている。

(i) Mの(rational)cohomology algebra の generator は、少なくとも2つある。

(ii) Mの free loop space のベッチ数からなる数列は、非有界である。

Main theorem より、Vigué-Poirrier, Sullivan の定理の拡張を考えるのは意味があるだろう。

主定理の証明の方針は、finite order をもつ isometry f で不変な閉測地線が有限本しかないと仮定することにより、$C^0(M,f)$ のベッチ数が一様に有界になることを示す。

§2. 準備

Mを$(n+1)$次元のコンパクトなリーマン多様体とし、$\langle\ ,\ \rangle$をMのリーマン計量とする。gを order s (sは自然数)の isometry とする。$\Omega(M,g)$を絶対連続 $\sigma:[0,1]\to M$, $g(\sigma(0))=\sigma(1)$ でその速度ベクトル σ' が、$\int_0^1 \langle\sigma'(t),\sigma'(t)\rangle dt<\infty$ である曲線からなる集合とする。$\Omega(M,g)$には、完備なヒルベルト・リーマン多様体の構造がはいる([4])。しかも、$C^0(M,g)$ と $\Omega(M,g)$ は homotopy 同値になる([4])。$\Omega(M,g)$の各元は、自然に$\mathbb{R}$からMへの写像と考えられる。

$g^s = id.$ と仮定したから、$\Omega(M,g)$ の各元は、周期 s の曲線になる。$\Omega(M,g)$ 上にパラメーターの移動によって定義される $S^1 = [0,s]/\{0,s\}$-action がある。エネルギー関数 $E^g : \Omega(M,g) \to \mathbb{R}$ を、$E^g(c) = 1/2 \int_0^1 \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle dt$ で定義する。c が E^g の critical point であることと、c が g で不変な閉測地線であることとは、同値である([4])。もし、c が nonconst. (i.e. $E^g(c) \neq 0$) ならば、常に critical orbit $S^1 \cdot c = \{\beta(c) \mid \beta \in S^1\}$ 上にある。明らかに、$S^1 \cdot c$ の各元は、E^g の critical point である。次に、孤立した critical orbit に対して、local homological invariant と呼ばれるある種の homology を定義する。Gromoll と Meyer ([3]) によって、この homology は定義されたが、有限次元の場合には、すでに Morse により定義されたものである。まず、exp を M の exponential map とし、$\overline{\exp} : N \to \Omega(M,g)$, $Y \mapsto \exp \circ Y$ で $\overline{\exp}$ を定義する。ここで、N は normal bundle $\pi : N \to S^1 \cdot c$ の total space を示す。$\tilde{N} \to S^1 \cdot c$ を normal disc bundle とした時、$\tilde{N}$ が十分小さいならば、$\mathcal{D} = \overline{\exp}(\tilde{N})$ が $S^1 \cdot c$ の tubular neighborhood になるようにできる。c での fiber を $\mathcal{D}_c = \overline{\exp}(\tilde{N}_c)$ ($\tilde{N}_c$: c 上の fiber) とし、E^g_c を $\mathcal{D}_c$ への E^g の制限とする。$S^1 \cdot c$ を孤立した critical orbit としよう。もし必要なら、さらに小さい tubular neighborhood $\mathcal{D}$ をとれば、

c は $\mathcal{D}_c$ で E^g_c の唯一の critical point となるようにできる。W_c, W_c^- を c における $\mathcal{D}_c$ 上のエネルギー関数 E^g_c に対する admissible regions ([3]) とする。孤立した critical orbit $S^1 \cdot c$ に対する E^g の local homological invariant $\mathcal{H}(E^g, S^1 \cdot c)$ を、

$$\mathcal{H}(E^g, S^1 \cdot c) = H_*(S^1 \cdot W_c, S^1 \cdot W_c^-)$$

で定義する。このhomologyは標数zeroの体を係数とするsingular homologyを使う。便宜上、c での E^g_c に対する local homological invariant $\mathcal{H}(E^g_c, c)$ を、

$$\mathcal{H}(E^g_c, c) = H_*(W_c, W_c^-)$$

で定義しておく。これらの定義は、W_c, W_c^-, $\mathcal{D}$ の取り方には依存しない。Gromoll と Meyer ([3]) による shifting theorem より、

$$\mathcal{H}_{k+\lambda}(E^g_c, c) = \mathcal{H}^0_k(E^g_c, c)$$

が成り立つ。ここで、λ は c の index、$\mathcal{H}^0_k$ は characteristic invariant を表わす。E^g_c の degenerate part に E^g_c を制限して、c の local homological invariant を定義したものである。E^g_c の null space の次元は $2n$ 以下だから、$k > 2n$ ならば、$\mathcal{H}^0_k(E^g_c, c) = 0$ である。すでに、[9] で以下の2つの評価を得ている。

(2.1). $B_k(c, g) \leq B^0_{k-\lambda}(c, g) + B^0_{k-\lambda-1}(c, g)$

ここで、$B_k(c, g) = \dim \mathcal{H}_k(E^g, S^1 \cdot c)$, $B^0_k(c, g) = \dim \mathcal{H}^0_k(E^g_c, c)$。

$a<b$ を E^g の regular values とし，$(E^g)^{-1}[a,b]$ の中にある critical set は，有限個の critical orbits $S^1 c^1, \cdots, S^1 c^k$ からなるものとする。この時，Morse の不等式を得る。

(2.2) $\quad b_k(\Omega^b(M,g), \Omega^a(M,g)) \le \sum_{i=1}^{k} B_k(c^i, g)$

ここで，$\Omega^b(M,g) = (E^g)^{-1}[0,b]$，$b_k(\Omega^b, \Omega^a) = \dim H_k(\Omega^b, \Omega^a)$。

§3. index と nullity

(2.1) と (2.2) 式により，critical point の index ならびに nullity の評価と characteristic invariant $\mathcal{H}^0$ の上からのそれをする必要がある。各整数 $m\ (\neq 0)$ に対して，iteration map $m: \Omega(M,g) \to \Omega(M,g^m)$ を $m(\sigma)(t) = \sigma_m(t) = \sigma(mt)$ で定義する。次の定理は，重要な定理で，本質的に Gromoll と Meyer ([2]) により証明されている。

<u>Theorem 3.1</u>. $S^1 c$ を $\Omega(M,g)$ の nonconst. $(E^g(c) \neq 0)$ な critical orbit で，ある整数 $m\ (\neq 0)$ に対して，$S^1 c_m$ が孤立した critical orbit で $\nu(c,g) = \nu(c_m, g^m)$ が成り立つとする。その時，任意の k に対して，$\mathcal{H}^0_k(E^g_c, c) \cong \mathcal{H}^0_k(E^{g^m}_{c_m}, c_m)$ が成り立つ。ここで，$\nu(c,g)$ (resp. $\nu(c_m, g^m)$) は $\Omega(M,g)$ (resp. $\Omega(M,g^m)$) の critical orbit $S^1 c$ (resp. $S^1 c_m$) の nullity を表わす。

f を order s の isometry とする。一つの critical point から生成される critical orbits の index, nullity について調べよう。もし、γ が nonconst. な f で不変な閉測地線であるとすれば、最小周期が s/m (≤ 1) であるようなある critical point c によって、γ を表現できる。m_0 と s_0 を互いに素な、正整数で $s_0/m_0 = s/m$ を満たすものとする。n_0 と k_0 を、$m_0 \cdot n_0 = 1 + s_0 \cdot k_0$ を満たすようにとる。$\bar{c}(t) = c(t/m_0)$ と定義すれば、$\bar{c}$ は E^g $(g = f^{n_0})$ の critical point になる。$\bar{c}$ の最小周期は s_0 で、$\bar{c}$ は f^{s_0} で固定されている。$m s_0 + k m_0 \neq 0$ を満たす勝手な整数 m と k に対して、$\bar{c}_{m s_0 + k m_0}$ は、E^{f^k} の critical point である。$S^1 \cdot \bar{c}_{m s_0 + m_0}$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ は、γ によって生成される $\Omega(M, f)$ の中のすべての critical orbits である。まず、$S^1 \cdot \bar{c}_{m s_0 + k m_0}$ の、index と nullity の公式を求めよう。$f = id.$ の場合、Bott ([1]) が見つけたような公式を我々は必要とする。$V_{\bar{c}}$ を $\bar{c}$ に垂直で直交する C^∞ ベクトル場からなるベクトル空間とする。線型写像 $L : V_{\bar{c}} \to V_{\bar{c}}$ を

$$LX = -X'' - R(X, \bar{c}')\bar{c}'$$

で定義する。$\lambda(\bar{c}_{m s_0 + k m_0}, f^k)$ (resp. $\nu(\bar{c}_{m s_0 + k m_0}, f^k)$) を critical orbit $S^1 \cdot \bar{c}_{m s_0 + k m_0} (\subset \Omega(M, f^k))$ の index (resp. nullity) とする。Morse ([12]) が示したように

$$
(3.1)\begin{cases}
\lambda(\bar{C}_{ms_0+km_0}, f^k) = \sum_{\mu<0} \dim\{X \in V_C \mid LX = \mu X,\ \forall t \in \mathbb{R} \text{ に対して},\ X(t+ms_0+km_0) = f_*^k(X(t))\} \\
\nu(\bar{C}_{ms_0+km_0}, f^k) = \dim\{X \in V_C \mid LX = 0\ \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ に対して},\ X(t+ms_0+km_0) = f_*^k(X(t))\}
\end{cases}
$$

となる。V_Cを複素化し、それを再びV_Cと書く。さらにf_*, g_*, Lを $\mathbb{C}$-linear map に拡張し、それらを再び同じ記号で表わす。各実数μと$\omega \in S^1 \subset \mathbb{C}$ に対して、$S_C[\mu, ms_0+km_0, \omega f_*^k] = \{X \in V_C \mid LX = \mu X,\ X(t+ms_0+km_0) = \omega f_*^k(X(t))\}$ と定義する。

Lemma 3.2. 任意の実数μと$ms_0+km_0 \neq 0$なる任意の整数m, kに対して、1), 2), 3) が成り立つ。

1) $S_C[\mu, ms_0+km_0, f_*^k] = \bigoplus_{\omega^{(ms_0+km_0)s'}=1} S_C[\mu, 1, \omega g_*] \cap S_C[\mu, ms_0+km_0, f_*^k]$

2) $S_C[\mu, 1, \omega g_*] \cap S_C[\mu, ms_0+km_0, f_*^k] = S_C[\mu, 1, \omega g_*] \cap \ker\{(f_*^{s_0})^{mn_0+kk_0} - \omega^{-(ms_0+km_0)}\}$

ここで、$f_*^{s_0} : V_C \to V_C$ を、$(f_*^{s_0}X)(t) = f_*^{s_0}(X(t))$ で定義した。

3) $S_C[\mu, 1, \omega g_*] \cap \ker\{(f_*^{s_0})^{mn_0+kk_0} - \omega^{-(ms_0+km_0)}\} = \bigoplus_{z^{mn_0+kk_0}=\alpha^{-1}} S_C[\mu, 1, \omega g_*] \cap \ker(f_*^{s_0} - z)$

ここで、$\alpha = \omega^{ms_0+km_0}$.

証明は、fが prime power order の場合とまったく同様にできる。([10])。このLemmaより、

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}[\mu, ms_0+\ell m_0, f_*^{\ell}] = \bigoplus_{\alpha^{s}=1}\ \bigoplus_{\omega^{ms_0+\ell m_0}=\alpha}\ \bigoplus_{z^{mn_0+\ell k_0}=\alpha^{-1}} \mathcal{S}_{\mathbb{C}}[\mu,1,\omega g_*]\cap \ker(f_*^{s_0}-z)$$

$$= \bigoplus_{\alpha^{s/s_0}=1}\ \bigoplus_{\omega^{ms_0+\ell m_0}=\alpha}\ \bigoplus_{z^{mn_0+\ell k_0}=\alpha^{-1}} \mathcal{S}_{\mathbb{C}}[\mu,1,\omega g_*]\cap\ker(f_*^{s_0}-z)\ 。$$

各 $z\in S^1\subset\mathbb{C}$ と $\omega\in S^1$ に対して、$\Lambda^z(\omega)=\sum_{\mu<0}\dim_{\mathbb{C}}\{\mathcal{S}_{\mathbb{C}}[\mu,1,\omega g_*]\cap\ker(f_*^{s_0}-z)\}$、$N^z(\omega)=\dim_{\mathbb{C}}\{\mathcal{S}_{\mathbb{C}}[0,1,\omega g_*]\cap\ker(f_*^{s_0}-z)\}$ とおけば、S^1上の非負整数値関数 Λ^z, N^z が得られる。(3.1)式と今のことから、

$$(3.2)\quad \begin{cases} \lambda(\bar{C}_{ms_0+\ell m_0}, f^{\ell}) = \displaystyle\sum_{\alpha^{s/s_0}=1}\ \sum_{\omega^{ms_0+\ell m_0}=\alpha}\ \sum_{z^{mn_0+\ell k_0}=\alpha^{-1}} \Lambda^z(\omega) \\ \nu(\bar{C}_{ms_0+\ell m_0}, f^{\ell}) = \displaystyle\sum_{\alpha^{s/s_0}=1}\ \sum_{\omega^{ms_0+\ell m_0}=\alpha}\ \sum_{z^{mn_0+\ell k_0}=\alpha^{-1}} N^z(\omega) \end{cases}$$

を得る。関数 Λ^z, N^z は、以下の性質を持つ。

(3.3) 各 $z\in S^1$ に対して、$N^z(\omega)\neq 0$ となる点 $\omega\in S^1$ は、高々2個である。その点を、zに関するPoincaré points と呼ぶ。

(3.4) Λ^z は、z に関するPoincaré points を除いて、局所一定である。

(3.5) 各 z, ω_0 に対して、$\lim_{\omega\to\omega_0}\Lambda^z(\omega)\geq\Lambda^z(\omega_0)$。

(3.6) $\ker(f_*^{s_0} - z) = \{0\}$ なる z に対しては，$\Lambda^z \equiv N^z \equiv 0$。
(3.2) 式と (3.4)，(3.5)，(3.6) より，以下の Lemma を得る。

<u>Lemma</u> 3.3. 各整数 l，$0 \le l < s/s_0$ に対して，全ての $m \in D_l = \{m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \mid mn_0 + k_0 \equiv l \mod s/s_0\}$ に対して，$\lambda(\bar{c}_{ms_0+m_0}, f) = 0$ であるか，そうでなければある正数 ε_l と a_l が存在して，

$$\lambda(\bar{c}_{m_1 s_0+m_0}, f) - \lambda(\bar{c}_{m_2 s_0+m_0}, f) \ge (m_1 - m_2)\varepsilon_l - a_l$$

が勝手な $m_i \in D_l$，$m_1 \ge m_2$，$i=1,2$ に対して，成り立つ。

(3.2)式と (3.3)，(3.6) より次の重要な Lemma を得る。

<u>Lemma</u> 3.4. 各整数 l，$0 \le l < s/s_0$，に対して，有限個の正整数 $k_1, \dots, k_q$ と数列 m^i_j，$i>0$，$j=1,\dots,q$，が決まり以下の性質を満たす。$\{m^i_j k_j\}$ は互いに異なり，$\{m^i_j k_j \mid j=1,\dots,q,\ i>0\} = \{ms_0+m_0 \mid m \in D_l\}$ を満たしさらに，$\nu(\bar{c}_{m^i_j k_j}, f) = \nu(\bar{c}_{m^i_j k_j}, f|Fix(f^{s_0 s^i_j})) = \nu(\bar{c}_{k_j}, f^{L}|Fix(f^{s_0 s^i_j}))$ を満たす。

ここで，s^i_j は，$(m^i_j, s^i_j) = 1$ で，s/s_0 の約数のうちで最大の整数を表わす。L は，$L \cdot m^i_j \equiv 1 \mod s_0 s^i_j$

を満たす整数である。 $\nu(\bar{c}_{\bar{m}}, f^{\bar{k}}|Fix(f^{\bar{s}}))$ は critical orbit $S^1\cdot\bar{c}_{\bar{m}}$ の $\Omega(Fix(f^{\bar{s}}), f^{\bar{k}}|Fix(f^{\bar{s}}))$ 内における nullity を表わす。$Fix(f^{\bar{s}})$ は $f^{\bar{s}}$ の不動点からなる集合で、M の compact, totally geodesic な submanifold になる。

これで主定理の証明の準備がほぼすんだ。証明の前に、必要な Cor. を2つあげておく。もし critical orbit $S^1\cdot\bar{c}_{m_j' k_j}$ が孤立しているならば、Theorem 3.1の証明と同様な方法により、

$$\mathcal{H}^0(E^{f}_{\bar{c}_{m_j' k_j}}, \bar{c}_{m_j' k_j}) = \mathcal{H}^0(E^{f|Fix(f^{s_0 s_j'})}_{\bar{c}_{m_j' k_j}}, \bar{c}_{m_j'})$$

が成り立つ。また、Theorem 3.1 より、勝手な k に対して

$$\mathcal{H}^0_k(E^{f|Fix(f^{s_0 s_j'})}_{\bar{c}_{m_j' k_j}}, \bar{c}_{m_j' k_j}) \cong \mathcal{H}^0_k(E^{f^{k}|Fix(f^{s_0 s_j'})}_{\bar{c}_{k_j}}, \bar{c}_{k_j})$$

を得る。ここで、$\mathcal{H}^0(E_c^{f^{\bar{k}}|Fix(f^{\bar{s}})}, c)$ は、$\Omega(Fix(f^{\bar{s}}), f^{\bar{k}}|Fix(f^{\bar{s}}))$ 上で定義されたエネルギー関数 $E^{f^{\bar{k}}|Fix(f^{\bar{s}})}$ とその critical point c に対して定義された characteristic invariant を示す。上のことから、以下の corollary を得る。

<u>Corollary</u> 3.5. すべての critical orbits $S^1\cdot\bar{c}_{ms_0+m_0}$

, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, は $\Omega(M, f)$ 内で孤立した critical orbits とする。その時、すべての k と $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ に対して、$B^0_k(\bar{c}_{m s_0 + m_0}, f) \leq B$ となる定数 B が存在する。さらに任意の $k > 2n$ と m に対して、$B^0_k(\bar{c}_{m s_0 + m_0}, f) = 0$ となる。

(2.1) 式と Lemma 3.3 より,

<u>Corollary</u> 3.6. Corollary 3.5 の仮定の下で, $B_k(\bar{c}_{m s_0 + m_0}, f)$ は一様に $2B$ で上からおさえられる。さらに, 勝手な $k > 2n + 1$ に対して, $B_k(\bar{c}_{m s_0 + m_0}, f) \neq 0$ なる critical orbits $S^1 \cdot \bar{c}_{m s_0 + m_0}$, $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, の個数は, k に依存しないある定数, C をこえない。

<u>Main theorem</u> 3.7. M を compact, simply connected なリーマン多様体とし, f を有限の order を持つ isometry とする。もし $C^0(M, f)$ の Betti 数のつくる数列が非有界ならば, f で不変な閉測地線は無限に存在する。

注、M は simply connected と仮定したから, $C^0(M, f)$ の各次元の Betti 数は有限である。([11])。

(証明) もし, f で不変な閉測地線が有限本しかないとすれば, 有限個の $E^{f^{n_i}}$ の critical point c^i $(1 \leq i \leq r,$

$n_i \in \mathbb{Z}^+$）で $\Omega(M,f)$ 内の任意の nonconstant critical point は、ある i と m に対して、critical orbit $S^1 c^i{}_m$ 内に存在するように critical points c^i（$1 \le i \le r$）を選べる。Cor. 3.5 と 3.6 で決まった critical point c^i に対する定数を B^i, C^i とする。$\hat{B} = \max\{B^i ; 1 \le i \le r\}$, $\hat{C} = \sum_{i=1}^{r} C^i$ とおく。任意の $k > 2n+1$ に対して、$B_k(c^i{}_m, f) \neq 0$ なる critical orbits $S^1 c^i{}_m \in \Omega(M,f)$ の個数は $\hat{C}$ 以下である。Morse の不等式（(2.2)）より、勝手な regular values $a < b$ と k（$> 2n+1$）に対して、

$$b_k(\Omega^b, \Omega^a) \le 2\hat{C}\hat{B}$$

となる。ここで、$\Omega^b = \Omega^b(M,f)$ と書いた。a として、$0 < a < \min\{E^{f^{n_i}}(c^i) ; 1 \le i \le r\}$ と選べば、$Fix(f)$ は Ω^a の強変位レトラクト（[4]）だから、勝手な k に対して

$$b_k(\Omega^b, \Omega^a) = b_k(\Omega^b, Fix(f))$$

となる。$k > n+1$ なる k に対しては、$b_k(Fix(f)) = 0$ より勝手な $k(> 2n+1)$ に対して、（exact sequence より）

$$b_k(\Omega^b) = b_k(\Omega^b, Fix(f))$$

となる。k（$> 2n+1$）を勝手に選び、固定した時、十分大きな regular value b を選べば、Morse の不等式より、全ての regular value d（$\ge b$）に対して、

$$b_k(\Omega^d, \Omega^b) = b_{k+1}(\Omega^d, \Omega^b) = 0$$

となる。　故に、$b_k(\Omega) = b_k(\Omega^b) = b_k(\Omega^b, Fix(f)) \leq 2\widehat{CB}$ となり、定理の仮定に反す。

Bibliography

[1] R.Bott, On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory, Comm.Pure Appl.Math. 9 (1956), 171-206.

[2] D.Gromoll, W.Meyer, Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds, J.Differential geometry 3 (1969), 493-510.

[3] __________, On differentiable functions with isolated critical points, Topology 8 (1969), 361-369.

[4] K.Grove, Condition (C) for the energy integral on certain path-spaces and applications to the theory of geodesics, J.Differential Geometry 8 (1973), 207-223.

[5] ________, Isometry-invariant geodesics, Topology 13 (1974), 281-292.

[6] ________, Involution-invariant geodesics, Math.Scand.36 (1975), 97-108.

[7] K.Grove and M.Tanaka, On the number of invariant closed geodesics, to appear in Bull.Amer.Math.Soc. 82 (1976)

[8] M.Vigué-Poirrier and D.Sullivan, The homology theory of the closed geodesic problem, to appear in J.Differential geometry.

[9] M.Tanaka, On invariant closed geodesics under isometries, to appear in Kōdai Math.Sem.Rep.

[10] ________, Invariant closed geodesics under isometries of prime power order, to appear.

[11] J.P.Serre, Homologie singulière des espaces fibrès, Ann.of

Math. 54 (1951), 425-505.

[12] M.Morse, The calculus of variations in the large, Amer. Math.Soc.Colloq.Publ. vol. 18, (1934).