数理解析研究所講究録
276巻 1976年 42-55

Einstein structure の deformation

阪大 数学　　小磯憲史

<u>問題</u>　Einstein structure を smooth に変形することは、どの程度可能か？

Einstein deformation、即ち Einstein structure の変形は、flat torus を"歪める"ことなど、自然な例しか知られていない。そこで、逆に「自然な deformation 以外にない」という予想のもとに、その部分的な結果を紹介する。具体的な例は、次の定理の応用として示される。

<u>定理</u>　Einstein manifold (M, g) について、curvature operator の最小固有値を α_0 とおく。Ricci tensor ρ が $\rho = \varepsilon g$ を満たすとする。$\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$ ならば、g は infinitesimally non-deformable である。

§0　準備

まず、C^∞-manifold M は orientable, connected, compact,

$\dim M = m \geq 3$ であるとする。riemannian manifold (M, g) に対して、以下の記号を使用する。type $(0,2)$ の symmetric tensor bundle S^2, M上の tensor bundle T に対して、その cross section 全体 $C^\infty(T)$, 一点における内積 $(\ ,\ )$, global な内積 $\langle\ ,\ \rangle$, 共変微分 ∇, curvature tensor R, Ricci tensor ρ, として $\{h \in S^2 ; \operatorname{tr} h = 0\}$ を S^2_0 であらわす。又、∇ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する formal adjoint を δ で、$\delta | C^\infty(S^2)$ の formal adjoint を δ^* であらわし、更に関数に対する Laplacian Δ と tensor bundle に対する rough Laplacian $\bar{\Delta}$ をそれぞれ $\Delta = \delta \circ d$, $\bar{\Delta} = \delta \circ \nabla$ によって定義する。

なお、∇, R などは metric に関係するので、$g(t)$ によって定義されるものを ∇_t, $R(t)$ などとあらわす。又、tensor の添数の上げ下げはすべて $g(t)$ によるものとし、$'$ は上げ下げのあとでの t による微分をあらわす。

以上で導入した記号になりたつ式をあげよう。

$$R^{k}_{ijl} = \nabla_i \nabla_j \xi^k - \nabla_j \nabla_i \xi^k, \quad R_{ijkl} = R^{m}_{ijk} g_{ml}, \quad \rho_{ij} = -R^{l}_{ilj}$$

$$(\delta S)^{i_1 \cdots i_r}_{j_2 \cdots j_s} = -\nabla^l S^{i_1 \cdots i_r}_{l j_2 \cdots j_s}, \quad (\delta^* \xi)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i)$$

$$\Delta f = -\nabla^l d_l f, \quad (\bar{\Delta} S)^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = -\nabla^l \nabla_l S^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$$

さて、体積一定な 1-parameter の metric 族 $g(t)$ が $g(0) = g$ を満たすとき、$g(t)$ を g の deformation と呼ぶ。これについて、次の定理が有効である。

定理（D. Ebin）　$g(t)$ を g の deformation とするとき，g の deformation $\tilde{g}(t)$ と1径数変換群 $\gamma(t)$ が存在して，十分小さな t に対して次の式を満たす。

$$\gamma(t)^* \tilde{g}(t) = g(t) \quad , \quad \delta(\tilde{g}'(0)) = 0$$

そこで，$\mathrm{Ker}\,\delta$ を <u>essential i-deformation</u> という。又，1径数変換群 $\tilde{\gamma}(t)$ について，$\frac{d}{dt}\big|_0 \tilde{\gamma}(t)^* g = 2\delta^* \xi$（$\xi$ は $\tilde{\gamma}'(0)$ の dual 1-form）となるから，$\mathrm{Im}\,\delta^*$ を <u>trivial i-deformation</u> という。

§1　Einstein i-deformation

以下，(M, g) は Einstein manifold とし，$g(t)$ も Einstein deformation，即ち $g(t)$ がすべて Einstein metric である deformation を意味するものとする。更に，$\rho(t) = \varepsilon(t) \times g(t)$ として $\varepsilon(t)$ を定める。

まず，$g'(0)$ の満たすべき式を求めよう。一般に，

$$\rho' = \frac{1}{2}(\bar{\Delta} g' + 2Q g' + 2L g' - 2\delta^* \delta g' - \mathrm{Hess}\,\mathrm{tr}\, g')$$

ここに，Q は Ricci operator，L は curvature operator，

i.e.　$(Qh)_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i^{\ l} h_{jl} + \rho_j^{\ l} h_{il})$，$(Lh)_{ij} = R_{ikjl} h^{kl}$，

一方，$\rho' = \varepsilon' g + \varepsilon g'$

又，$h \in C^\infty(S^2)$，$\xi \in C^\infty(\Lambda^1)$，$f \in C^\infty(M)$ に対して，

$$\mathrm{tr}\, \bar{\Delta} h = -\nabla^l \nabla_l h_i^{\ i} = \Delta\, \mathrm{tr}\, h \quad , \quad \mathrm{tr}\, \mathrm{Hess}\, f = g^{ij} \nabla_i d_j f = -\Delta f$$

$\mathrm{tr}\,Lh = g^{ij}R_{ikjl}h^{kl} = -\mathrm{tr}\,Qh$, $\mathrm{tr}\,\delta^*\xi = \frac{1}{2}g^{ij}(\nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i) = -\delta\xi$

であるから、両式の右辺に tr を作用させれば、

$$n\varepsilon' + \varepsilon\,\mathrm{tr}\,g' = \Delta\,\mathrm{tr}\,g' + \delta\delta g'$$

積分して. $n\varepsilon'\langle 1,1\rangle + \varepsilon\langle g', g\rangle = 0$

体積一定だから $\langle g', g\rangle = 0$ 従って $\varepsilon' = 0$ ……(*)

更に. $g'(0)$ が essential であることを仮定すれば.

$$\varepsilon\,\mathrm{tr}\,g' = \Delta\,\mathrm{tr}\,g'$$

ところが. ε なる Δ の 0でない固有値は存在しないから.

$\varepsilon \neq 0$ なら $\mathrm{tr}\,g' = 0$ 。$\varepsilon = 0$ でも. $\mathrm{tr}\,g'$ は定数となり. 積分すれば体積一定の条件から $\mathrm{tr}\,g' = 0$ を得る。そこで. 次の定義をあたえよう。

<u>定義</u> essential i-deformation h が $\bar{\Delta}h + 2Lh = 0$, $\mathrm{tr}\,h = 0$ を満たすとき. h を <u>Einstein i-deformation</u> という。

<u>定義</u> Einstein i-deformation が 0 のみであるとき. <u>infinitesimally non-deformable</u> であるという。

<u>補題 1-1</u> (M. Berger)

$\varepsilon(t)$ は定数である。

(証明) 性質(*) $\varepsilon' = 0$ は t に depend しない。 Q.E.D.

<u>系</u>

$(M.g)$ が flat ならば. $g(t)$ も flat である。

(証明) $(M.g)$ に対して. flat torus T^n を riemannian covering になる。このcovering map π に対して、$g(t)$ は π^*g のEinstein deformation $\pi^*g(t)$ を引きおこすが、補題1-1によって、$\rho_{\pi^*g(t)}=0$ となる。従ってBochnerの定理により $(T^n, \pi^*g(t))$ の n 個の独立なharmonic vector field $\{X_i\}$ はparallelであり、よって $\pi^*g(t)$ はflat。従って $g(t)$ もflatである。 Q.E.D.

§2 基本定理

定理 2-1

curvature operator $L: S^2_0 \to S^2_0$ の M における最小固有値を α_0 とおくとき、$\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$ を満たすEinstein 多様体はinfinitesimally non-deformableである。

(証明) $C^\infty(S^2_0)$ の元 h に対して、

$$(\Theta\nabla h)_{ijk} = x\nabla_i h_{jk} + y\nabla_j h_{ki} + z\nabla_k h_{ij}$$

$(x, y, z$ は $x^2+y^2+z^2=1$ を満たす実数$)$ とおく。

$xy+yz+zx=u$ とおけば、u は $[-\frac{1}{2}, 1]$ の中を動き、

$$\langle \Theta\nabla h, \Theta\nabla h\rangle = \langle \nabla h, \nabla h\rangle + 2u\langle \nabla_i h_{jk}, \nabla_k h_{ij}\rangle$$

$$= \langle \bar\Delta h, h\rangle - 2u\langle \nabla^k\nabla_i h_{jk}, h_{ij}\rangle$$

ここで、$\nabla^k\nabla_i h_{jk} = -g^{km}R^l_{mij}h_{lk} - g^{km}R^l_{mik}h_{jl} + \nabla_i\nabla^k h_{jk}$

$$= (Lh)_{ij} + \rho_i^l h_{jl} - (\nabla\delta h)_{ij}$$

従って、$\langle \bar\Delta h - 2uLh - 2u\varepsilon h + 2u\nabla\delta h, h\rangle \geq 0$

ここで、ℓを0でないEinstein i-deformation とすれば、
$\delta\ell = 0$, $\bar{\Delta}\ell = -2L\ell$ を満たすから、

$$u\varepsilon\langle \ell,\ell\rangle \le -(1+u)\langle L\ell,\ell\rangle$$

従って、 $\alpha_0 \le \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$

よって逆に $\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$ であれば、このようなℓは存在しない。 Q.E.D.

この定理が基本定理であり、以下の命題はすべてこの定理の適用である。

§3 断面曲率による評価

まず、断面曲率が0になる次元 td(N) を次のように定義する。多様体Nの点pにおける正規直交系、$O_p = \{X_i\}$ に対して、$a_{ij} = -R_{ijij}$ は $i \neq j$ のとき断面曲率を、$i=j$ のとき0をきえる。i_0 に対して、$a_{i_0 j}$ なる j の個数を数え、p, O_p, i_0 を動かしてその最大値を得る。その数を td(N) とおこう。

<u>命題3−1</u>

Einstein manifold (M, g) が非正断面曲率でしかも universal riemannian covering $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の既約分解 $\tilde{M} = \prod_{a=1}^{k} \tilde{M}_a$ に対して $2td(\tilde{M}_a) < \dim \tilde{M}_a$ がなりたつとき、g は infinitesimally non-deformable である。

(証明) (I) まず$(\tilde{M}, \tilde{g})$が既約なときを考える。$\tilde{M}$の一点

mにおいて、0でない$h \in S_0^2$について$Lh = \alpha h$とする。hは対称だから、適当な正規直交系で対角化して$h^{ii} = x^i$とおく。

さて、$R_{ijkl} h^{ik} h^{jl} = \sum_{i,j} R_{ijij} x^i x^j = -\sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j$

ところで、a_{ij}も対称であることに注意して、$\sum a_{ij} y_i = \lambda y_j$なる数ベクトル$(y_i)$を考える。このとき、$y_r = \max_j |y_j|$, $a_{ri} < 0$ $(i > r)$; $r = \mathrm{td}(\tilde{M})$としてよい。すると、$\lambda > 0$に対して、

$$-\lambda y_r = -\sum a_{ir} y_i \geq \sum a_{ir} y_r = -\sum R_{irir} y_r = \rho_{rr} \cdot y_r$$
$$= \varepsilon y_r$$

従って、$-\lambda \geq \varepsilon$であり、特に等号は$y_i = -y_r$ $(i > r)$なるときに限るが、このとき、

$$\sum y_i = \sum_{i>r} y_i + \sum_{i \leq r} y_i \leq -(n-r) y_r + r y_r = -(n-2r) y_r < 0$$

従って、$\sum x^i = 0$なる条件のもとでは、$-\sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j > \varepsilon \sum (x^i)^2$

ところで、$\alpha(h, h) = -\sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j > \varepsilon \sum (x^i)^2 = \varepsilon (h, h)$

よって、$\alpha > \varepsilon$

(II) 一般に考えよう。既約成分への分解によって、curvature tensorも分解する。従って、$\tilde{M}$のmetric $\tilde{g}$とRicci tensor $\tilde{\rho}$は、$\tilde{g} = \sum_a g_a$, $\tilde{\rho} = \sum_a \rho_a$

(g_a, ρ_aは$\tilde{M}_a$のmetric tensor, Ricci tensor)

と分解するから、$\rho_a = \varepsilon g_a$となる。さて、$S_0^2(\tilde{M})$の分解

$$S_0^2(\tilde{M}) = \left(\bigoplus_a S_0^2(\tilde{M}_a)\right) \oplus \left(\left(\bigoplus_a \mathbb{R} \cdot g_a\right) \cap S_0^2(\tilde{M})\right) \oplus \sum_{a \neq b} S^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b)$$

ここに、$S^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b) = \{ \ell \in S^2(\tilde{M}_a \times \tilde{M}_b) ; \ell(T(\tilde{M}_a), T(\tilde{M}_a)) = 0,$

$\ell(T(\tilde{M}_b), T(\tilde{M}_b)) = 0 \}$

に応じて $\tilde{M}$ の curvature operator $\tilde{L}$ も分解して、

$\tilde{L} | S^2_0(\tilde{M}_a) = \tilde{L}_a \quad (= \tilde{M}_a$ の curvature operator$)$

$\tilde{L} | (\bigoplus_a (\mathbb{R} \cdot g_a)) \cap S^2_0(\tilde{M}) = -\varepsilon$

$\tilde{L} | S^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b) = 0 \qquad (a \neq b)$

となる。$\varepsilon < 0$ であるから $\alpha_0 > \varepsilon$ を得る。 Q.E.D.

<u>系</u>

負断面曲率の Einstein manifold (M, g) は infinitesimally non-deformable である。

(証明) $fd(M) = 1$ Q.E.D.

<u>命題 3-2</u>

次の条件 i) ii) のいずれかを満たす Einstein manifold (M, g) は infinitesimally non-deformable である。

i) M のすべての断面曲率が $[k, 1]$ に含まれ、

$(1 + (m-1)^{-1})(1-k) - \varepsilon (m-1)^{-1} < 2(m-1)^{-1}$

ii) M のすべての断面曲率が $[-1, -k]$ に含まれ、

$(1 - (m-1)^{-1})(1-k) + 2\varepsilon (m-1)^{-1} < 2(m-1)^{-1}$

(証明) i) は $\alpha_0 + \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ を、ii) は $\alpha_0 - \varepsilon > 0$ を証明する。まったく同様な計算であるから、i) のみを示そう。命題 3-1 の証明と同じく、ℓ を対角化して $\ell^{ii} = x^i$ とおく。更に、

$y^i = x^i \geq 0$ $(i \leq c)$, $z^i = -x^i > 0$ $(i > c)$ としてよい。このとき、$\sum x^i = 0$ より、$\sum_{i\leq c} y^i = \sum_{i>c} z^i = A$ とおける。まず、条件式は $\varepsilon > n(1-k) - 2$ と同値であり、従って $1+\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ であることに注意する。

$$(L\xi.\xi) + \frac{1}{2}(\varepsilon\xi.\xi) = -\sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j + \frac{1}{2}\varepsilon\sum_i (x^i)^2 + \sum_i x^i \sum_j x^j$$

$$= (1+\tfrac{1}{2}\varepsilon)\{\sum (y^i)^2 + \sum (z^j)^2\} + \sum_{i\neq j}(1-a_{ij})y^i y^j$$

$$+ \sum_{i\neq j}(1-a_{ij})z^i z^j - 2\sum(1-a_{ij})y^i z^j$$

$$\geq (1+\tfrac{1}{2}\varepsilon)(\tfrac{1}{c}A^2 + \tfrac{1}{n-c}A^2) - 2(1-k)A^2$$

$$\geq \{\tfrac{4}{n}(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon) - 2(1-k)\}A^2 > 0$$

Q.E.D.

系

Einstein manifold $(M.g)$ のすべての断面曲率が $(\frac{n-2}{2n-1}, 1]$ に含まれれば、g は infinitesimally non-deformable である。

(証明) ii) を適用する。$k > \frac{n-2}{2n-1}$ であるから、

$1-k < \frac{n+1}{2n-1}$. $\frac{\varepsilon}{n-1} > \frac{n-2}{2n-1}$ Q.E.D.

§4 locally symmetric space of non-compact type

§3で断面曲率による評価を示したが、locally symmetric space の場合は、より詳しい評価が可能である。特に、non-compact type の場合は、次のような結果を得る。

命題 4-1

locally symmetric space of non-compact type の Einstein manifold M は．M の universal covering $\tilde{M}$ が2次元の symmetric space を既約成分に持たなければ．infinitesimally non-deformable である。

（証明）　$\tilde{M}=G/K$ が既約な場合について証すれば．命題3-1の証明IIと同じく．一般の場合に拡張される。そこで．G を実又は複素単純リー群とする。

G, K のリー代数を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ として．$\mathfrak{g}$ の killing form B による直交分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ を考えれば．$o=eK$ における tangent space $T_o(\tilde{M})$ が $\mathfrak{m}$ に同一視される。そのとき．o における正規直交系 $\{X_i\}$ に対して．$A_{ij}=cB([X_i,X_j],[X_i,X_j])$。ただし．$[X_i,X_j]\in\mathfrak{k}$，$B|\mathfrak{k}\otimes\mathfrak{k}$ は負定値で c は正定数。

そこで．$N=\{1\leq i\leq n\}$ とおき．行列 $(a_{ij})=(\varepsilon^{-1}A_{ij})$ を考えると．次の条件をみたす。

i) $a_{ij}\geq 0$ $(\forall i,j\in N)$，$\sum_j a_{ij}=1$ $(\forall i\in N)$

ii) N の部分集合 N' が $a_{ij}=0$ $(\forall i,j\in N')$ を満たせば．N' の元の個数 $\#N'$ は $\frac{1}{2}n$ よりも小さい。

iii) 次のような N の分割 $N=A\cup B$ は存在しない。

$$a_{ij}=0 \quad (\forall i\in A,\ \forall j\in B)$$

i) は明らかである。ii) は N' に対して $\{X_i\}_{i\in N'}$ を考えれば．これは $\mathfrak{m}$ の中の可換代数を生成し．従って $\#N'\leq \mathrm{rank}\,\tilde{M}$ である。irreducible symmetric space の rank はすべて調べ

られており、$\dim \tilde{M}=2$ の場合を除いて、$\mathrm{rank}\,\tilde{M} < \frac{1}{2}\dim \tilde{M}$ が成りたっている。よって ii) が成立する。iii) については、$\{X_i\}_{i\in A}$, $\{X_j\}_{j\in B}$ で生成される vector space $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ をとれば $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_A+\mathfrak{m}_B$, $[\mathfrak{m}_A,\mathfrak{m}_B]=0$. そこで、$\mathfrak{m}_A,\mathfrak{m}_B$ で生成されるリー代数(実又は複素)をそれぞれ $\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_B$ とおけば、$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]=\mathfrak{k}$ より $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_A+\mathfrak{g}_B$, $[\mathfrak{g}_A,\mathfrak{g}_B]=0$. これは $\mathfrak{g}$ の単純性に反する。

(a_{ij}) に次の補題4-2を適用すれば、L の固有値 α に属する固有形式 ξ を対角化して $\xi^{ii}=x^i$ とおいたとき、

$$\alpha(\xi,\xi)=(L\xi,\xi)=R_{ijkl}\xi^{ik}\xi^{jl}=(-\varepsilon)\cdot\sum_{i,j}(\varepsilon^{-1}a_{ij})x^ix^j$$
$$=(-\varepsilon)\sum_{i,j}a_{ij}x^ix^j > \varepsilon\sum_i (x^i)^2 = \varepsilon(\xi,\xi)$$

即ち $\alpha > \varepsilon$ Q.E.D.

<u>補題4-2</u>

命題4-1の証明における、行列 $S=(a_{ij})$ に関する3つの条件が成りたてば、S の固有値はすべて -1 より大きい。

(証明) S の固有値 λ に属する固有ベクトル (y_i) をとる。$\lambda<0$, $\max_i |y_i|=1$, 更に $y_i=1$ なる i が存在するとしてよい。

$$N=\{i\in\mathbb{Z};\ 1\le i\le m\} \qquad O_i=\{j\in N;\ a_{ij}=0\}$$
$$P=\{i\in N;\ y_i=1\} \qquad Q=\{i\in N;\ y_i=-1\}$$

とおけば、$P\neq\phi$ であるから、$i_0\in P$ が存在して、

$$1 = y_{i_0} = \lambda^{-1}\sum_i a_{ii_0} y_i \leq -\lambda^{-1}\sum_i a_{ii_0} = -\lambda^{-1}$$

従って、$\lambda \geq -1$。そこで、$\lambda \neq -1$ を証すれば十分である。以下、$\lambda = -1$ を仮定し、矛盾を導びこう。

$\lambda = -1$ だから、上の不等において等号が成立する。従って、

(*1) $i \notin O_{i_0}$ なら $i \in Q$

(*1) と条件 i) によって、$Q \neq \phi$。そこで、$j_0 \in Q$ が存在して、 $1 = -y_{j_0} = \sum_i a_{ij_0} y_i \leq \sum_i a_{ij_0} = 1$

よって、 (*2) $i \notin O_{j_0}$ なら $i \in P$

そこで、$j \notin P \cup Q$ について、(*1) (*2) より $j \in O_{i_0} \cap O_{j_0}$。だから、$i_0, j_0$ を動かして、

$i \in P \cup Q$, $j \notin P \cup Q$ なら $a_{ij} = 0$

を得る。$A = P \cup Q$, $B = N - P \cup Q$ とおけば、条件 iii) によって $B = \phi$ よって $P \cup Q = N$

一方、$i, j \in P$ とすれば、$j \notin Q$ だから (*1) により $j \in O_i$ 即ち $a_{ij} = 0$。従って、条件 ii) によって $\# P$ は $\frac{1}{2}\# N$ より小さく、同様に $\# Q < \frac{1}{2}\# N$。これは $P \cup Q = N$ に反する。

Q.E.D.

§5 locally symmetric space of compact type

最後に、定理2-1の、直接の計算による適用の例をあげる。いずれも (M, g) の universal covering $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が irreducible symmetric space of compact type G/K として定義される。

[Hermitian symmetric space]

この場合は、E. Calabi と E. Vensentini, A. Borel によって、固有値が計算されている。$\alpha_0 > -\frac{1}{2}\varepsilon$ を満たすものは、次の3種である。

AIII $SU(m+m')/S(U_m \times U_{m'})$

$(m=1,\ m' \geq 4),\ (m'=1,\ m \geq 4)$

DIII $SO(2m)/U(m)$ $(m \geq 6)$

EVII $E_7/E_6 \cdot T^1$

[一般の場合]

一般の場合も、原理的には計算可能であるが、繁雑なので2例をあげるにとどめる。$\alpha_0 > -\frac{1}{2}\varepsilon$ を満たすのは、$p \geq q$ なる条件のもとに次の通りである。

BDI $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$

$(p \geq 4,\ q=1),\ (q \geq p-1,\ p+q \geq 7)$

CII $(p=q=1),\ (p \geq 3,\ q=1)$

$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$

参考文献

M. Berger, Quelque formules de variation pour une structure riemannienne, Ann. scient. Éc. Norm. Sup, 4^e série, t. 3, (1970). 285-294

M. Berger & D. Ebin, Some decomposition of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold, J. Diff. Geom. 3 (1969) 379-392

A. Borel, On the curvature tensor of the Hermitian symmetric manifolds, Ann. of Math. 71 (1960) 508-521

E. Calabi & E. Vesentini, On compact, locally symmetric Kähler manifolds, Ann. of Math. 71 (1960) 472-507

D. Ebin, The manifold of riemannian metrics, Proc. of the 1968 Summer Institute on Global Analysis, Amer. Math. Soc.