数理解析研究所講究録
276巻 1976年 12-25

極小部分多様体の安定性について

富山大 教育　　森　博

§1.

M^mを orientable m次元 Riemann 多様体, $\bar{M}^n$を n次元 Riemann 多様体, $x: M^m \to \bar{M}^n$を minimal immersion とする。いま $D \subset M^m$を closure compact な領域 (i.e. Dは M^mの open, connected subset で, その closure $\bar{D}$は compact である) で, その境界∂Dが区分的に滑らかであるとする (もちろんDが M^mに等しい場合も考えることができる)。∂Dを固定する trivial でない任意の変分 φ_t (ただし $\varphi_0 = x$) について

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Volume}\, \varphi_t(D) \Big|_{t=0} = 0$$

であるが,

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathrm{Volume}\, \varphi_t(D) \Big|_{t=0} > 0$$

が、常に成り立つとき、Dは、安定しているという。

ここでの目的は、上記のようなDの安定性に関する結果を述べることである。

1973年 M. do Carmo と J. L. Barbosa の両氏は、次の興味ある結果を得た。

定理1 ([1]). $x : M^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : M^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ 内の minimal surface と、その Gauss map を表わすものとする。$D \subset M^2$ を closure compact な領域で、その境界が、有限個の区分的に滑らかな曲線から成り立っているものとする。

このとき、Area $g(D) < 2\pi$ ならば、Dは安定である。

続いて、1974年 J. Spruck 氏が、定理1の拡張を試み、J. Spruck と D. Hoffman の両氏によって得られた Sobolev の不等式[5]を利用して、次の結果を得た。

定理2 ([18]). $x : M^2 \to \mathbb{R}^n$ $(n > 3)$ を minimal immersion とし、Dを上記の性質を有するものとする。このとき、正定数 C_1 があり、$\int_D |K| dV < C_1$ ならば Dは 安定である。

ただし, Kは、Mの Gauss 曲率, dV は Mの area element を表わす。(ここに、$C_1 = \frac{1}{54\pi}$)

定理3（[18]）．$x : M^m \to \mathbb{R}^n$ $(m \geqq 3,\ n \geqq 4)$ を minimal immersion とし、Dを上記の性質を有するものとする。このとき、mのみに依存する正定数$C_2(m)$があり、

$\left(\int_D \|B\|^m dV\right)^{\frac{1}{m}} < C_2(m)$ ならば、Dは、安定である。ただし、BはM^mの第二基本形式で、$\|B\|$は、その norm を表わし、dVは、M^mの volume element を表わす。

（ここに、$C_2(m) = 2^{-m} \frac{m-2}{(1+m)^{1+\frac{1}{m}}} \omega_m{}^{\frac{1}{m}}$ ）

注意．Spruck 氏は、定理2の定数C_1をnに依存する正定数のように書いておりますが、[5]の Sobolev の不等式を検討してみると、上記のような定数になることが、わかる。

ここで、ambient space $\overline{M}^n$が、一般の Riemann 多様体である場合を考えてみることにする。

定理4（[10]）．$\overline{M}^n$ $(n \geqq 4)$を完備、単連結で、断面曲率が、$-b^2 \leqq \overline{K}_\sigma \leqq -\delta b^2$ $(0 \leqq b,\ 0 < \delta \leqq 1)$ を満たすn次元 Riemann 多様体とし、M^m $(m \geqq 3)$をそのm次元 minimal submanifold，$D \subset M^m$を closure compact な領域で、境界∂Dが、区分的に滑らかであるとする。D上の関数fを $f(p) = \mathrm{Max}.\{0,\ \|B\|^2(p) - m\delta b^2\}$ $(p \in D)$ によって定める。このとき、mのみに依存する正数$d_1(m)$が、あって、

$\left(\int_D f^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{1}{m}} < d_1(m)$ ならば、Dは安定である。(ここに、$d_1(m)$ は、定理3の定数 $C_2(m)$ に等しい。)

注意、定理4において、$b=0$ の場合、定理3に帰着する。

定理5 ([10])、$\overline{M}^n$ $(n \geqq 4)$ を断面曲率 $\overline{K_\sigma}$ が、$0 < \overline{K_\sigma} \leqq b^2$ $(b>0)$ を満たし、injectivity radius の M における下限 $\overline{R}(M^m)$ が、$\overline{R}(M^m) \geqq \frac{\pi}{b}$ を満たす n 次元 Riemann 多様体とし、M^m $(m \geqq 3)$ をその minimal submanifold とし、Dを定理4と同じ性質をもつものとする。このとき、m にのみ依存する正定数 $d_2(m)$ があって、$\left[\int_D (\|B\|^2 + m b^2)^{\frac{m}{2}} dV\right]^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$ ならば、Dは安定である。(ここに、$d_2(m) = \frac{1}{\pi} 2^{1-m} \frac{m-2}{(m+1)^{1+\frac{1}{m}}} \omega_m^{\frac{1}{m}}$)

更に、3次元単位球面 S^3 内の minimal surface の領域の安定性について、次のことが、成立する。

定理6 ([11])、M^2 を3次元単位球面 S^3 内の minimal surface でその Gauss 曲率Kが、$K \leqq \frac{a-4}{a-2}$ $(a \geqq 4)$ を満たしているものとする。Dを定理1と同じ性質をもつものとする。このとき $\int_D (1-K) dV < \frac{1}{27\pi a}$ ならば、Dは、安定である。

定理6の応用として、Plateau 問題の解に関するある結果が、得られる。まず、x：D($\mathbb{R}^2$の単位球面)$\longrightarrow S^3$が、$C^2(\bar{D})$写像で、Dにおいて、harmonic かつ conformal とし、$x|\partial D$は、∂Dから、S^3内のC^2級 Jordan curve Γへの、homeomorphism を与えるとする。KをDから、写像xの singularities を除いた所で、定義される曲面の Gauss 曲率とする。すると Gauss－Bonnet の公式と R.D. Gulliver 氏[3]の結果を用いると次のことが、成立する。

系([11]) x：D($\mathbb{R}^2$の単位球体)$\rightarrow S^3$をS^3内のC^2級 Jordan curve Γに対する Plateau 問題の解とする。上記のKが、$K \leqq \dfrac{a-4}{a-2}$ ($a \geqq 4$)を満たすものとする。このとき、$\mathrm{Area}\ x(D) + \int_\Gamma k(s)\,ds < 2\pi + \dfrac{1}{27\pi a}$ ならば、(D, x)は安定である。ここに$\int_\Gamma k(s)\,ds$は、Γの total curvature を表わす。

§2.

以下定理5の証明の概略を述べることにする。

$\bar{M}^n$をn次元 C^∞ Riemann 多様体とし、その Riemann 計量と Riemann 接続をそれぞれ、$\langle\ ,\ \rangle$, $\bar{\nabla}$とする。$M=M^m$をm次元 orientable C^∞多様体，x：M$\longrightarrow \bar{M}^n$を minimal immersion とし、$< \ , \ >$, ∇ をそれぞれ x によって、induce された M の Riemann 計量, Riemann 接続とする。TM, NM をそれぞれ M の tangent bundle, normal bundle とし、TM_p, NM_p $(p \in M)$ をそれぞれ点 p における M の tangent space, normal space とする。このとき、M の第二基本形式 B は、対応 $B : TM \times TM \longrightarrow NM$ で、$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^N$, $X, Y \in TM$, によって与えられる。ここに、$(\quad)^N$ は、$\overline{M}$ の tangent vector を M の normal space へ射影することを表わす。

次に第二変分公式を導くために、いくつかの定義をする。まず、$E \in NM_p$ に対して、$\|B(E)\|^2 = \sum_{i,j} (\langle B(e_i, e_j), E \rangle)^2$ とおく。ここに、$\{e_i\}$ は、TM_p の orthonormal basis である。更に、$\|B\| = (\sum_k \|B(E_k)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ とおく。ここに $\{E_k\}$ は、NM_p の orthonormal basis である。$\|B\|$ は、orthonormal bases の取り方に依らないという意味において、well-defined である。$\|B\|$ を第二基本形式 B の norm と呼ぶ。

$\Gamma(NM)$ を NM の C^∞ cross-sections の作る vector space とし、Laplace operator $\Delta : \Gamma(NM) \to \Gamma(NM)$ の定義を M の normal connection $\nabla^\perp$ を用いて、

$$(\Delta \nu)(p) = \sum_j \{\nabla^\perp_{e_j} \nabla^\perp_{e_j} \nu - (\nabla^\perp_{\nabla_{e_j} e_j} \nu)\}(p)$$

$\nu \in NM_p$によって与える。ここで$\{e_j\}$はTM_pのorthonormal basisである。

$\bar{R}$を$\bar{M}^n$のcurvature tensorとするとき，

$$\bar{R}(X) = \sum_j \bar{R}_{e_j, X} e_j \quad , \quad X \in T\bar{M}_p$$

と定める。ここで，$\{e_j\}$はTM_pのorthonormal basisとする。

$D \subset M^m$をclosure compactな領域で，その境界∂Dは，区分的に滑らかであるとする。$E \in \Gamma(T\bar{M})$を$E|D$は，D上のnormal vector field，$E|\partial D \equiv 0$とし，φ_tを($\bar{M}^n$内の)Dの近傍において，Eによって生成されるflowとし，$A(t) = \text{Volume}\ \varphi_t(D)$とおく。このとき第二変分公式は，次の式で表わされる。

$$\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_D \{\langle E, \Delta E\rangle + \|B(E)\|^2 - \langle \bar{R}(E), E\rangle\} dV$$

そこで，$E = u\nu$（νは，D上のunit normal vector field，uは，$\bar{D}$上のC^∞ functionで，∂D上で，vanishする）とおいて，上の変分公式を書き直すと，次のLemmaが，成立する。

Lemma 1. $\bar{M}^n, M^m, D$は定理5の仮定を満たすとする。このとき，$\left.\dfrac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} \geqq -\int_D \{u\Delta u + (\|B\|^2 + mb^2)u^2\} dV$

$$= \int_D \{ |\nabla u|^2 - (\|B\|^2 + m b^2) u^2 \} dV$$

が、成立する。ここに ∇u は、u の gradient vector field である。

定理5の正定数 $d_2(m)$ の存在は、次の Lemma から、わかる。

Lemma 2. $\overline{M}^n$, M, D は、定理5と同じとする。h を $\overline{D}$ 上で、non-negative C^1 級関数で、∂D 上で、vanish するものとする。このとき、

$$\left[\int_D h^{\frac{2m}{m-2}} dV \right]^{\frac{m-2}{2m}} \leqq d_2^{-1} \left(\int_D |\nabla h|^2 dV \right)^{\frac{1}{2}}$$

が、成立する。ただし、次の条件を満たすものとする。

$$\text{(i)}\ b \left[\frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{supp}\, h)}{(1-\alpha)\omega_m} \right]^{\frac{1}{m}} \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{(ii)}\ 2\rho \leqq \overline{R}(M^m)$$

ここに、$\rho = \frac{1}{b} \sin^{-1} \left[2b \left(\frac{\mathrm{vol}(\mathrm{supp}\, h)}{(1-\alpha)\omega_m} \right)^{\frac{1}{m}} \right]$,

$d_2 = d_2(m, \alpha) = \frac{1}{\pi} 2^{1-m} \alpha (1-\alpha)^{\frac{1}{m}} \frac{m-2}{m} \omega_m^{\frac{1}{m}}$, α は、$0 < \alpha < 1$ なる free parameter, ω_m は、$\mathbb{R}^m$ の単位球体の体積とする。

注意. $d_2(m,\alpha)$ は $\alpha=\frac{m}{m+1}$ のとき. 最大値をとり, 更に定理5の $d_2(m)$ に等しい。h の仮定"$\bar{D}$ 上で C^1 級である"を"$h\in H_1^\circ(D)$"に代えても成立する。ここに $H_1^\circ(D)$ は Sobolev space である。また容易に定理5の条件から, Lemma 2の条件 (i), (ii) が満たされることがわかる。J. Spruck と D. Hoffman の両氏の得た Sobolev の不等式の証明に gap がありますが, 上記の Lemma 2は, その gap を補正した後に適用することによって得たものである。

定理5の証明

Dが安定であることを示すには Lemma 1によって,

仮定 $\left(\int_D(\|B\|^2+mb^2)^{\frac{m}{2}}dV\right)^{\frac{1}{m}}<d_2(m)$ から

(1) $$\int_D(\|B\|^2+mb^2)u^2dV<\int_D|\nabla u|^2dV$$

for all $u\neq 0$ in $H_1^\circ(D)$

であることを示すとよい。このことを背理法を用いて示す。つまり,

(2) $$\int_D|\nabla u|^2dV\leqq\int_D(\|B\|^2+mb^2)u^2dV$$

for some $u\neq 0$ in $H_1^\circ(D)$

であると仮定して矛盾を導く。Sobolev space $H_1^0(D)$の性質から不等式(2)におけるuが"$u \geqq 0$ on $\bar{D}$"であるとしてよい。すると lemma 2 の注意から，

$$(3)\quad \left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}}\, dV\right)^{\frac{m-2}{2m}} \leqq d_2(m)^{-1}\left(\int_D |\nabla u|^2 dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2)，(3) と Hölder の不等式から

$$\left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV\right)^{\frac{m-2}{2m}} \leqq d_2(m)^{-1}\left(\int_D (\|B\|^2 + m b^2) u^2 dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqq d_2(m)^{-1}\left[\left(\int_D (\|B\|^2 + m b^2)^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{2}{m}}\left(\int_D u^{\frac{2m}{m-2}} dV\right)^{\frac{m-2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

従って

$$\left(\int_D (\|B\|^2 + m b^2)^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{1}{m}} \geqq d_2(m)$$

となり，矛盾が生ずる。故に定理5が示されたことになる。

§3.

定理5の例を述べることにする。まず，ambient space $\bar{M}^n$ を標準的な Riemann 計量を持つ $(m+1)$ 次元単位球面 S^{m+1} $(n = m+1)$ とする。$\bar{M}^{m+1}$ は明らかに $b = 1$ に対して定理5の仮定を満たしている (i.e. $\bar{K}_\sigma \equiv 1$ かつ $\bar{R}(\bar{M}) \equiv \pi$)。

次に，$0 < \alpha < 1$ なる実数 α に対して

$$\Sigma_\alpha^m = \{x = (x^1, \cdots, x^{m+1}) \in S^m ;\ x^{m+1} \geqq \alpha\}$$

とおく。ここに S^m は、m 次元単位球面とする。このとき、Σ_α^m は、S^{m+1} の compact orientable, n 次元 totally geodesic submanifold で、境界 $\partial\Sigma_\alpha^m = \{x = (x^1, \cdots, x^{m+1}) \in S^m ;\ x^{m+1} = \alpha\}$ を持つ。他方 $\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^m$ は、α に関する単調減少、連続関数で、$\alpha \to 1$ のとき $\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^m \to 0$ である。

従って、定理5の条件、つまり、

$$\left(\int_{\Sigma_\alpha^m} (\|B\|^2 + m)^{\frac{m}{2}} dV\right)^{\frac{1}{m}} = m^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^m)^{\frac{1}{m}} < d_2(m)$$

を満たす α が、存在する。故に、ある α $(0 < \alpha < 1)$ が、存在して、"S^{m+1} 内に、境界を持つ compact orientable, m 次元 totally geodesic（それ故 minimal）submanifold Σ_α^m が、安定である" が、成立する。次に別の例を構成するために、$\mathbb{R}^{m+2}$ を $\mathbb{R}^{p+1}$ と $\mathbb{R}^{q+1}$ の直積と考え、

$$\Sigma_\alpha^p(r) = \{x = (x^1, \cdots, x^{p+1}) \in S^p(r) ;\ x^{p+1} \geqq \alpha\}$$
$$\Sigma_\beta^q(s) = \{y = (y^1, \cdots, y^{q+1}) \in S^q(s) ;\ y^{q+1} \geqq \beta\}$$

とおく。ここに $p + q = m$; $r, s > 0$, $r^2 + s^2 = 1$; $0 < \alpha, \beta < 1$ であり、$S^p(r)$ は、$\mathbb{R}^{p+1}$ の原点を中心とする半径 r の球面とし、$S^q(s)$ についても、同様とする。

このとき $M := \Sigma_\alpha^p(r) \times \Sigma_\beta^q(s)$ は、S^{m+1} 内の compact

orientable submanifold で、その境界は、
$(\partial\Sigma_\alpha^p(r)\times\Sigma_\beta^q(s))\cup(\Sigma_\alpha^p(r)\times\partial\Sigma_\beta^q(s))$ である。

ところで、Mの第二基本形式Bは、固有値として、
$\frac{s}{r}$ (multiplicity p) と、$-\frac{r}{s}$ (multiplicity q) を持つから、Mが、minimal であるための必要十分条件は、$r=\sqrt{\frac{p}{m}}$、$s=\sqrt{\frac{q}{m}}$ である。よって、Mが、minimal であるならば、$\|B\|^2=m$ となる。従って、先程の例の構成の議論から，定理5の条件、つまり、

$$\left(\int_{\Sigma_\alpha^p(\sqrt{\frac{p}{m}})\times\Sigma_\beta^q(\sqrt{\frac{q}{m}})}(\|B\|^2+m)^{\frac{m}{2}}\,dV\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$=(2m)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Vol}\,\Sigma_\alpha^p\left(\sqrt{\frac{p}{m}}\right)\cdot\mathrm{Vol}\,\Sigma_\beta^q\left(\sqrt{\frac{q}{m}}\right)<d_2(m)$$

を満たす、α, β が、存在する。故に、あるα, β $(0<\alpha,\beta<1)$ が、存在して、"S^{m+1}内に、境界を持つ、compact orientable m 次元 minimal submanifold $\Sigma_\alpha^p(\sqrt{\frac{p}{m}})\times\Sigma_\beta^q(\sqrt{\frac{q}{m}})$ が、安定である。" が、成立する。
この minimal submanifold は、明らかに、totally geodesic でない。

References

[1] J. L. Barbosa and M. do Carmo, On the size of a stable minimal surface in R^3, preprint (1973).

[2] S. S. Chern, Minimal submanifolds in a Riemannian manifold, Mimeographed Lecture Notes, Univ. of Kansas, 1968.

[3] R. D. Gulliver II, Regularity of minimizing surfaces prescrived mean curvature, Ann. of Math., Vol.97 (1973), 275 - 305.

[4] E. Heinz and S. Hildebrandt, Some remarks on minimal surfaces in Riemannian manifolds, Comm. Pure and Appl. Math., Vol.23 (1970), 371 - 377.

[5] D. Hoffman and J. Spruck, Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds, Comm. Pure and Appl. Math., Vol.27 (1974), 715 - 727.

[6] ———— , A correction to [5], Comm. Pure and Appl. Math., Vol.28 (1975), 765 - 766.

[7] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Vol.II, Interscience, New York, 1969.

[8] H. B. Lawson, Jr., Minimal varieties in constant curvature manifolds, Ph. D. thesis, Stanford Univ., 1968.

[9] ———— , Minimal Varieties in Real and Complex Geometry, Univ. of Montréal Press, Montréal, 1973.

[10] H. Mori, Notes on the stability of minimal submanifolds of Riemannian manifolds, preprint (1975).

[11] H. Mori, A note on the stability of minimal surfaces of 3-dimensional unit sphere, preprint (1976).

[12] C. B. Morrey, Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, New York, 1966.

[13] R. Osserman, A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem, Ann. of Math., Vol.91 (1970), 550-569.

[14] T. Ōtsuki, A remark on the Sobolev inequality for Riemannian submanifolds, Proc. Japan Acad., Vol.51 (1975), 785-789.

[15] S. Sasaki, Differential Geometry in the large (in Japanese), Shibundō, Tokyo, 1957.

[16] ————, On the total curvature of a closed curve, Japan J. Math., Vol.29 (1959), 118-125.

[17] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math., Vol.88 (1968), 62-105.

[18] J. Spruck, Remarks on the stability of minimal submanifolds of R^n, preprint (1974).