数理解析研究所講究録
276巻 1976年 1-11

平面的な測地線をもつ部分多様体について

東工大　理　　阪本邦夫

§1. 序.

M^n, $\overline{M}^{n+p}$ をそれぞれ n 次元, $(n+p)$ 次元連結完備リーマン多様体とする。$f: M^n \to \overline{M}^{n+p}$ を isometric immersion としよう. M^n の各測地線 σ に対し, σ の各点の近傍が, f により, $\overline{M}^{n+p}$ の2次元全測地的部分多様体内に写像されている時, f を planar geodesic immersion と呼ぶことにする.

Hong [3] は, $\overline{M}^{n+p}$ がユークリッド空間 E^{n+p} である時, 次のような結果を得た.

定理. $f: M^n \to E^{n+p}$ が planar geodesic である時, $f(M^n)$ が n 次元平面でなければ, M^n の断面曲率は 1/4-ピンチされている.

さらに, Hong は M^n が正の定曲率空間となるための条件をいくつかあげ, もし M^n が正の定曲率空間であれば, $f(M^n)$ は n 次元球かあるいは Veronese 多様体であることを証明した.

本稿においては，$\overline{M}^{n+p}$が real space form である時，Hongの定理を利用して planar geodesic immersion を全て決定できるということを述べたい．

§2. モデル（cf. [6]，[8]）．

よく知られている compact rank 1 対称空間の球への minimal immersionが planar geodesic であることを述べる．

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}$; $d = 1$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R})$, $d = 2$ $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$, $d = 4$ $(\mathbb{F} = \mathbb{Q})$ としよう．$\mathbb{F}$に要素をもつ $(m+1)$ 次 Hermite 行列の全体が成すベクトル空間を $\mathcal{H}(m+1, \mathbb{F})$，そのうちでトレースが1のものからなる超平面を $\mathcal{H}_1(m+1, \mathbb{F})$ と表わすことにする．$\mathcal{H}(m+1, \mathbb{F})$ は内積が

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{trace}(AB), \qquad A, B \in \mathcal{H}(m+1, \mathbb{F})$$

であるような Euclid 空間となる．$\mathbb{F}^{m+1} = E^{(m+1)d}$ の内積は，x, y を列ベクトルとして，

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(x^* y)$$

で与えられる．ただし $x^* = {}^t\bar{x}$ である．単位球 $S^{(m+1)d-1}(1) = \{x \in \mathbb{F}^{m+1} ; x^* x = 1\}$ から $\mathcal{H}(m+1, \mathbb{F})$ への写像 $\tilde{\varphi}$ を

$$\tilde{\varphi}(x) = x x^*$$

と定義すれば，$\tilde{\varphi}$ は imbedding $\varphi : \mathbb{F}P^m \longrightarrow \mathcal{H}(m+1, \mathbb{F})$ を induce

する．$\mathbb{F}P^m$の最大断面曲率が$\mathbb{F}=\mathbb{R}$の場合1，$\mathbb{F}=\mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}$の場は4となるようにRiemann計量を定めれば，ψはisometric imbeddingとなる．実は，$\psi(\mathbb{F}P^m)$は$\mathcal{H}_1(m+1,\mathbb{F})$内の半径が$\sqrt{m/2(m+1)}$であるような超球に含まれており，その超球の次元は$\ell_d = m(m+1)d/2 + m - 1$である．$\psi$をそこへのimbeddingとして考えれば，mappingはfullであることがわかる．測地線の様子を調べ，適当にhomothetyとしてやれば，次の結果を得る．

補題2.1．　上述の方法によって，minimal，fullかつplanar geodesicであるようなimbedding $f:\mathbb{F}P^m \to S^{\ell_d}(\tilde{c})$を得ることができる．ただし$\mathbb{F}P^m$の最大断面曲率は$\mathbb{F}=\mathbb{R}$の時$\dfrac{m\tilde{c}}{2(m+1)}$，$\mathbb{F}=\mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}$の時$\dfrac{2m\tilde{c}}{m+1}$である．$\mathbb{F}P^m$の各測地線は，fによって，半径$\sqrt{\dfrac{m+1}{2m\tilde{c}}}$の小円に写像されている．

次に，Cayley射影平面について述べる．$\mathbb{C}ay$を$\mathbb{R}$上のCayley代数，$\mathcal{H}(3,\mathbb{C}ay)$を3次Hermite行列から成るベクトル空間としよう．$\mathcal{H}(3,\mathbb{C}ay)$に内積

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{trace}(A\cdot B), \qquad A, B \in \mathcal{H}(3,\mathbb{C}ay)$$

を導入すれば，これは27次元Euclid空間となる．ここで$A\cdot B = \frac{1}{2}(AB+BA)$とする．$\mathcal{H}_1(3,\mathbb{C}ay)$をトレースが1であるような行列からなる超平面とすれば，Cayley射影平面は

$$\mathbb{C}ayP^2 = \{A \in \mathcal{H}_1(3,\mathbb{C}ay) : A^2 = A\}$$

と実現される．$\mathbb{C}ay P^2$ 上に誘導される metric は invariant metric であることに注意し，曲面論の立場から $\mathbb{C}ay P^2$ を考察すれば，次の結果を得ることができる．

補題 2．2．minimal，full かつ planar geodesic であるような imbedding $f: \mathbb{C}ay P^2 \longrightarrow S^{25}(\tilde{c})$ が得られる．ただし，$\mathbb{C}ay P^2$ の最大断面曲率は $\frac{4}{3}\tilde{c}$ である．各測地線は，f によって，半径が $\sqrt{\frac{3}{4\tilde{c}}}$ であるような小円に写像されている．

系．ι を $S^{\ell d}(\tilde{c})$ あるいは $S^{25}(\tilde{c})$ の real space form への全測地的か全臍的 immersion とすれば，$\iota\circ f$ もやはり planar geodesic である．

補題 2.1 及び系において，f あるいは $\iota\circ f$ と $S^m \to \mathbb{R}P^m$ との合成写像もやはり planar geodesic immersion であることに注意されたい．

以上において述べられた immersion を real space form への planar geodesic immersion のモデルと呼ぶことにする．

§3．第二基本形式．

$f: M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+p}$ を planar geodesic immersion とする．以下において次の記号を使用する．H は第二基本形式，η は平均曲率ベクトル，A_ξ を normal vector ξ に対応する第二基本テンソ

ルとし，特に orthonormal normal frame $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=n+1,\cdots,n+p}$ に対応する第二基本テンソルを A_α $(\alpha=n+1,\cdots,n+p)$ と表わすことにする．

補題 3.1．　f は isotropic である。すなわち，各点で M^n の任意な接ベクトル X に対し，

$$\|H(X,X)\|^2=\lambda^2$$

が成り立つ．ここで，λ^2 は M^n 上で定義された C^∞ 関数である．

補題 3.2．　Codazzi の構造方程式が任意の M^n の接ベクトル X, Y, Z に対し，

$$(\acute{\nabla}_X H)(Y,Z)=(\acute{\nabla}_Y H)(X,Z)$$

という形になっている時，λ は定数である．ただし $\acute{\nabla}$ は接バンドルと法バンドルの直和バンドルに誘導された接続とする．

以下においては，$\bar{M}^{n+p}$ は曲率 $\tilde{c}$ を持つ real space form $\bar{M}^{n+p}(\tilde{c})$ とする．したがって，Codazzi の構造方程式は上のような形をしている訳である．上の補題を利用すれば次の結果が得られる．

補題 3.3．　第二基本形式は平行である．すなわち，$\acute{\nabla}H=0$ が成り立っている．さらに

$$\mathfrak{S}\sum_\alpha \langle A_\alpha X, Y\rangle A_\alpha Z=\lambda^2\,\mathfrak{S}\,\langle X,Y\rangle Z$$

も成立する。ここで X, Y, Z は M^n の接ベクトル，$\mathfrak{S}$ は X, Y，Z に関する巡回和を表わしている．

補題 3.4.　f は pseudo umbilical である．すなわち

$$A_\eta = \|\eta\|^2 I$$

が成り立つ．ただし，I は M^n の接空間の恒等変換を意味するものとする．

上の補題を証明するには，第二基本形式のラプラシアンを計算し，補題 3.3 を利用すればよい．同時に次の方程式も得られる．

補題 3.5.　$T=(T_{\alpha\beta})$ を $T_{\alpha\beta}=\mathrm{trace}\,(A_\alpha A_\beta)$ によって定義される法空間の対称変換とすれば，任意な α に対し

$$\sum_\beta T_{\alpha\beta} A_\beta = \frac{n}{2}\left(2\|\eta\|^2 + \tilde{c} - \lambda^2\right) A_\alpha - \frac{1}{2}\left(\tilde{c} - \lambda^2\right)(\mathrm{trace}\, A_\alpha)\, I$$

が成り立つ．

上の方程式によって，T の固有値が計算できるということに注意されたい．

§4.　曲面の決定

第二基本形式は平行なのであるから，各点における normal space は first normal space $\{H(X,Y) : X, Y \in T_x M^n\}$ であり，immersion f は full であると仮定してよい．さらに f は全測地

的ではないと仮定する．

<u>補題</u> 4.1．　適当な orthonormal normal (local) frame field $\{\xi_\alpha\}$ をとれば，T は次のようなタイプに対角化される．

(I)　$T = a^2 I$，　$a^2 = \frac{n}{2}(\bar{c} - \lambda^2)$，

(II)　$T = \begin{pmatrix} b^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & b^2 & \\ & & & n\|\eta\|^2 \end{pmatrix}$，　$b^2 = \frac{n}{2}(2\|\eta\|^2 + \bar{c} - \lambda^2)$．

(I) の場合，必ず $\bar{c}$ は正でなければならない．さらに f は minimal である．　(II) の場合，

$$\operatorname{trace} A_\alpha = 0 \quad (\alpha \neq n+p), \qquad A_{n+p} = \frac{1}{n}(\operatorname{trace} A_{n+p})\, I$$

が成り立つ．さらに $p \neq 1$ のとき，$2\|\eta\|^2 > \lambda^2 - \bar{c}$ であり，$p = 1$ のとき，f は全臍的である．

<u>補題</u> 4.2．　タイプ (II) で $p \neq 1$ の場合 $\bar{c} + \|\eta\|^2 > 0$ である．

以上の補題によって，(II) ($p \neq 1$) の場合 M^n は $\xi_{n+p} = \eta/\|\eta\|$ に直交し曲率が $\tilde{c} = \bar{c} + \|\eta\|^2$ であるような全臍的超曲面 $S^{n+p-1}(\tilde{c})$ の中に極小的に immerse されていることがわかる．したがって，(I)，(II) ($p \neq 1$) いずれの場合においても，full minimal immersion $f : M^n \longrightarrow S^{n+q}(\tilde{c})$ を考えればよい．さらに f は isotropic (その isotropy 定数は $\mu^2 = \lambda^2 - \|\eta\|^2$) であり，また planar geodesic であることも容易に確めることができる．

<u>補題</u> 4.3．　ρ を M^n のスカラー曲率とすれば

$$\mu^2 = \frac{q\tilde{c}}{n+q+2}, \qquad \rho = n(n-1)\tilde{c} - \frac{1}{2}n(n+2)\mu^2$$

が成り立つ。

上の補題は補題4.1とfがisotropicであるという事実を使って証明される。

$f: M^n \to S^{n+q}(\tilde{c})$ が planar geodesic immersion である時，M^nの各測地線σに対し微分方程式

$$\overline{\nabla}_{f_*\dot{\sigma}}(H(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})) = -\mu^2 f_*\dot{\sigma}$$

が成り立っている。$S^{n+q}(\tilde{c}) \subset E^{n+q+1}$と考えてこの微分方程式を解けば次の結果が得られる。

<u>補題</u>4.4. σをM^nの unit speed geodesic とし，$\sigma(0) = x$，$\dot{\sigma}(0) = X$ とすれば

$$f(\sigma(t)) = f(x) + \frac{1}{\nu}(\sin \nu t) f_* X + \frac{1}{\nu^2}(1-\cos \nu t)(H(X, X) - \tilde{c} f(x))$$

となる。ここで $\nu^2 = \tilde{c} + \mu^2$ である。

上の式は，実は，Hongが[3]において得たものと同じである。実際，上式は$f\circ\sigma$が小円であることを意味している。したがって，次の結果を得る。

<u>補題</u>4.5. M^nの全ての断面曲率$s(X, Y)$について

$$\frac{1}{4}\nu^2 \leqq s(X, Y) \leqq \nu^2$$

が成立する。特に，M^nが定曲率空間であれば，その曲率は$\nu^2/4$である。

$\hat{M}^n$をM^nの universal Riemannian covering とすれば，$\hat{M}^n$は明らかに compact rank 1 対称空間である．$\hat{M}^n = S^n$である時，曲率は$\nu^2/4$，したがってスカラー曲率は$\rho = \frac{1}{4}n(n-1)\nu^2$となる．また$\hat{M}^n = \mathbb{C}P^m$ or $\mathbb{Q}P^m$ $(n = md)$である時，その最大断面曲率はν^2であるから，スカラー曲率は$\rho = m(m+1)\nu^2$ $(\hat{M}^n = \mathbb{C}P^m)$，$\rho = 4m(m+2)\nu^2$ $(\hat{M}^n = \mathbb{Q}P^m)$となる．$\hat{M}^n = \mathcal{C}ay P^2$である時は，スカラー曲率は$\rho = 16 \times 9\nu^2$で与えられる．このことと補題4.3により次の結果が得られる．

<u>補題</u>4.6．$\hat{M}^n$は compact rank 1 対称空間である．cをその最大断面曲率とする．$\hat{M}^n = S^n(c)$のとき

$$c = \frac{n}{2(n+1)}\tilde{c}, \quad g = \frac{1}{2}(n-1)(n+2), \quad \mu^2 = \frac{n-1}{n+1}\tilde{c}$$

となる．$\hat{M}^n = \mathbb{C}P^m(c)$ or $\mathbb{Q}P^m(c)$であれば

$$c = \frac{2m}{m+1}\tilde{c}, \quad g = \frac{1}{2}(m-1)(md+2), \quad \mu^2 = \frac{m-1}{m+1}\tilde{c}$$

である．$\hat{M}^n = \mathcal{C}ay P^2$ $(n = 16)$であれば

$$c = \frac{4}{3}\tilde{c}, \quad g = 9, \quad \mu^2 = \frac{1}{3}\tilde{c}$$

である．

上の補題におけるc及びgは補題2.1，2.2におけるそれらと一致していることに注意し，Wallach [9] に述べられている結果を応用すれば，次の定理に到達する．

<u>定理</u>．$f: M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+p}(\tilde{c})$を planar geodesic immersion とする．fは全測地的か全臍的であるか，あるいは§2におい

で与えられているモデルに合同である．

系． $f: M^n \to \bar{M}^{n+p}(c)$ は M^n の各測地線を $\bar{M}^{n+p}(c)$ の円に写像しているものとすれば，やはり定理と同じ結果を得る．

参考文献

[1] S. S. Chern, M. do Carmo & S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional Analysis and Related Fields, Springer, 1970, 59-75.

[2] M. P. do Carmo & N. R. Wallach, Minimal immersions of spheres into spheres, Ann. of Math., 95 (1971), 43-62.

[3] S. L. Hong, Isometric immersions of manifolds with plane geodesics into Euclidean space, J. Diff. Geometry 8 (1973), 259-278.

[4] T. Itoh & K. Ogiue, Isotropic immersions, J. Diff. Geometry 8 (1973), 305-316.

[5] B. O'Neill, Isotropic and Kähler immersions, Canad. J. Math. 17 (1965), 907-915.

[6] S. S. Tai, Minimum imbeddings of compact symmetric spaces of rank one, J. Diff. Geometry 2 (1968), 55-66.

[7] M. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 18 (1966), 380-385.

[8] M. Takeuchi & S. Kobayashi, Minimal imbeddings of R-spaces, J. Diff. Geometry 2 (1968), 203-215.

[9] N. R. Wallach, Symmetric spaces, Marcel Dekker 1972.