

*Rudvalis* 群について

北大 理

吉田 知行

奥山 哲郎

*Rudvalis* によって発見された、位数  $2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$  の単純群 (以下、*Rd.* と記す) について、*involution* の中心化群の構造からの特徴付けが、*Parrott* (*central* の場合)、*Dempwolff* (*non-central* の場合) によってなされています。ここでは、2-Sylow 群の構造からの特徴付けについて考えてみます。

定理 A. *Rd.* の 2-Sylow 群と同型の 2 群を Sylow 群としてもつ有限単純群は、*Rd.* に限る。

定理 A は、*Asa* によって既に得られているようですが、より一般的に、次の定理が証明されます。

定理 B.  $G$  を  $O^2(G) = G$  なる有限群とし、その 2-Sylow 群  $T$  が、次の条件を満足するとする。

- (a)  $|T| \geq 2^{14}$       (b)  $|Z_4(T)| = 2^4$
- (c)  $W = C_T(Z_3(T))$  とおくと、 $\Phi(W) \subseteq Z_3(T)$
- (d)  $A$  を  $|W:A| \leq 2^4$  なる  $W$  の部分群とすると、 $A \supseteq \Phi(W)$   
 このとき、次のいずれかが成立する。
- (1)  $G/O(G) \cong R_d$       あるいは、
- (2)  $G \triangleright O(G)W$  ,  $G/O(G)W \cong GL(3, 2)$

証明の概略を以下に記す。 $G, T, W$  を定理の仮定をみたす群とする。

### 1. Transfer 及び $N_G(W')$ の構造.

#### 補題 1.1.

- (1)  $Z(W) \supseteq W' = \Phi(W) = Z_3(T) \cong Z_2^3$
- (2)  $T/W \cong D_8$  ,  $W/W' \cong Z_2^8$  ,  $T/W' \cong Z_2 \wr D_8$  ,  $|T| = 2^{14}$
- (3)  $G \ni g$  に対し、 $|W:W \cap T^g| \leq 2$  なら、 $g \in N_G(W)$
- (4)  $W$ : weakly closed in  $T$  w.r. to  $G$ .

#### 補題 1.2.

- (1)  $T \subseteq X \subseteq G$  なる部分群  $X$  に対し、 $T \cap X' = T \cap N_X(W')$
- (2)  $N_G(W')/C_G(W) \cong GL(3, 2)$
- (1) は、1.1 (3) 及び、Yoshida の Transfer の適用による。(2) は、(1),  $W' \cong Z_2^3$  なることより得られる。

補題 1.3.  $N_G(W') = N_G(W) O(N_G(W'))$

1.1.(2) より,  $\text{Aut } T$  が 2-群なること, 及び,  $N_G(W)/C_G(W)W$  が  $GL(8, 2)$  の部分群であることを用いて証明される。

2.  $N_G(W)$  及び,  $W$  の構造.

$N = N_G(W)$ ,  $\bar{N} = N_G(W)/O(N_G(W))$  とおくと, 補題 1.2. 1.3 より,  $\bar{N}/W \cong GL(3, 2)$  は,  $W/W' \cong \mathbb{Z}_2^8$ ,  $W' \cong \mathbb{Z}_2^3$  に, faithful に作用している。

補題 2.1.  $\bar{N}/W$  は,  $W/W'$ ,  $W'$  へ既約に作用している。

$W'$  へは, 明らかで,  $W/W'$  のときは,  $GL(3, 2)$  の 2-modular 表現の理論を用いることができる ( $GL(3, 2)$  の既約な, 2-modular 表現は, 4個で次数が, 1, 3, 3, 8, すべて,  $\mathbb{Z}_2$  上で書ける)。

補題 2.2.  $W$  の構造は, 一意的に決定される。

$W/W'$ ,  $W'$  を,  $GF(2)[GL(3, 2)]$ -加群と考える。このとき,  $W/W' \otimes W/W' \ni x \otimes y \mapsto [x, y] \in W'$  なる  $GL(3, 2)$ -準同型を考えると,  $W/W' \otimes W/W'$  の既約 factor module を調べる: ことより,  $[x, y]$  が一意的に定まる。さらに,  $W/W' \ni x \mapsto x^2 \in W'$  なる写像を考えると,  $x^2$  が一意的に決定される: ことが示され。

$W$  の構造が決定される。

補題 2.2 の証明に使われる条件は,  $Rd.$  の 2-Sylow 群の  $W$  に相当する部分群についてもみたされよう. 以下において Dempwolff のいくつかの補題の結果を利用することができる.

補題 2.3.  $\text{rank } W = 5$ ,  $W$  は, 367 個の involutions をもつ

補題 2.4.  $N$  での involutions の共役類は, 4 個と, 次のようにとれる.

$$t \in T - W, \quad e, u \in W - W', \quad z \in W'$$

$$|C_N(t)| = 2^8, \quad |C_N(u)| = 2^4, \quad |C_N(e)| = 2^8 \cdot 7, \quad |C_N(z)| = 2^{14}$$

$$C_T(e) \cong \mathbb{Z}_2^2 \times \text{Suz}(8)_2 \text{ は } C_G(e) \text{ の 2-Sylow 群.}$$

これは, Dempwolff の結果などから容易に導かれる。

### 3. involutions の fusion 及び 中心化群の構造

$W'$  が, strongly closed in  $T$  w.r.t. to  $G$  のときは,

Goldschmidt により,  $G$  が決定され, 定理の (2) が成立する,

以下,  $W'$  は, strongly closed でないとする。

補題 3.1.  $\tau, u, e, z$  について.

$\tau \sim u \sim z \times e$  in  $G$  が成立する。

$N/W \cong GL(3, 2)$  の order 3 の元の  $W$  の中心化群を  $Q$  とおくと、 $Q \cong Q_8$ ,  $C_W(Q) = Y$  は  $Z_2^5$  と同型となる。

このとき、決りが成立する。

補題 3.2.  $N_G(Y)/O_{2,2}(N_G(Y)) \cong S_5$

$$C_G(Y)' = \langle z \rangle O_{2,2}'(N_G(Y)) \triangleleft N_G(Y)$$

これより、 $C_G(z)/O_{2,2}(C_G(z)) \cong S_5$  が導かれる。

補題 3.3.  $C_G(e)$  : solvable または、 $C_G(e)/O(C_G(e))$

は  $Z_2^2 \times Su_3(8)$  に同型

補題 3.2, 3.3, 及び Gorenstein-Walter より

$O(C_G(z)) = 1 = O(C_G(e))$  とより、Parrott, Dempwolff

の結果から、 $G$  が決定できる。