数理解析研究所講究録
277巻 1976年 79-84

2-Sylow-subgroupのindex 2のsubgroupに関するfusionについて

北大 理　福島博

§1

Glaubermanによって，有限群GにおいてSを2-Sylow-subgroupとし，tをSのinvolutionとするとき，tがt以外のSのどの元ともGにおいて共役でないとき，$[t, G] \subseteq O(G)$となることが証明された。これに関連して次の問題が考えられる。即ちS_0をSのsubgroupで$|S:S_0|=2$とする。tをS_0のinvolutionで，tがt以外のS_0のどの元ともGにおいて共役でないとき群Gはどんな群となるか．実際S_0がcyclic groupのときは，この条件は成立するから，2-Sylow-subgroupがdihedralやsemi-dihedralである群は，この性質を満すことがわかる。よってGlaubermanの場合においては，Gが非可換な単純群となることはなかったのに対して，この場合は非可換な単純群が存在することがわかる。ここでは，さらに強い条件のもとで群Gの構造を決定する。

§ 2

定理　G：有限群　$Z^*(G)=1$　$O^2(G)=G$

S : 2-Sylow-subgroup of G

仮定(★)
- $\exists S_0$: subgroup of S, $|S:S_0|\leq 2$
- $S_0 = T_1 * T_2 * \cdots * T_n$　（$*$は中心積を表わす。）
- $\{x^g\}\cap S_0 \leq \langle x\rangle$ for $\forall x\in T_i$ $(i=1,\cdots n)$ $\forall g\in G$

then S ; dihedral or semi-dihedral-2-group.

系.　G；有限単純群

Gは仮定(★)を満すとする。

then $G\simeq L_2(q)$ $q=$odd, A_7 $L_3(q)$ $q\equiv 1\ (4)$

$U_3(q)$ $q\equiv 1\ (4)$, M_{11}

注)　定理において $O^2(G)\neq G$ なる条件を除くと S_6 がその反例となっている。

定理の証明

conjugation family に関する Solomon の結果を用いると次のことがわかる。

補題1.　G：有限群　S : 2-Sylow-subgroup

$\exists T$: non-abelian subgroup of S_0　$|S:S_0|\leq 2$

$\{x^g\}\cap S_0\leq\langle x\rangle$ for $\forall x\in T$, $\forall g\in G$　then $Z^*(G)\neq 1$

証明）条件より $\forall x \in T$ に対して $\langle x \rangle \triangleleft T$

よってT $\simeq Q_8$ としてよいことがわかる。

$T = \langle x, y \mid x^4 = 1 \;\; x^2 = y^2 \;\; x^y = x^{-1} \rangle$ 　$z = x^2$ とおく。

Z^*-theorem により $\exists g \in G$ 　$z \neq z^g \in S$ （$Syl_2(G)$）

Solomonの結果より $g \in N(H)$，ただし $H = S$ or $N(H)/H$; 2-isolated

$N_S(H) \in Syl_2(N_G(H))$ 　$C_S(H) \subseteq H$

$H = S$ のとき $g \in N(S)$ 　$g \in N(S')$ 　$z \in Q' \subseteq S' \subseteq S_0$ 矛盾

一方 $T \subseteq N(H)$ 　∵） $\forall h \in H$ 　$h^2 = h$ or $zh \in H$

$H \neq S$ より $N(H)/H$; 2-isolated

$L = N(H)/H$ とおく．Benderにより群の構造は知られている。

即ちLの2-Sylow-gpのnormalizerの中にinvolutionにregularに

actするodd order element k が存在する。

$T^k \subseteq S$ 　$|T^k \cap S_0| \geq 4$ 　i.e. $\exists x \in T$ 　$|x| = 4$ 　$x^k \in S_0$

よって k fix $\bar{x} \in L$ 　∴ $x \in H$

$z^g = (x^g)^2 \in S_0$ 　$z^g = z$ となり矛盾．

このことより T_i $(i = 1, \cdots n)$; cyclic groupとしてよい。

補題2．　以下Gは定理のcounter-exampleとする。

S_0 ; weakly closed in S w.r.t G

証明）もし S_0 が S でweakly closedでないとする．

$\exists g \in G$ 　$S_0 \neq S_0^g \subseteq S$ 　$\langle S_0, S_0^g \rangle = S$

$S_0 \cap S_0^g \subseteq Z(S)$ 　このとき $\exp T_i \leq 4$ $(i = 1 \cdots n)$

∵) $\exp T_1 > 4$ とすると $|T_1 \cap S_0^g| \geq 4$ ie $\exists x \in T_1, x \in Z(S)$ $|x|=4$
これより $x^2 \in Z^*(G)$ となり矛盾を生じる。
さらに $S-S_0$ の元は involution となることより $|T_i| = 2 \ (i=1,\cdots n)$
となり S は elementary abelian group
Bender により S は four-group, これは G ; counter-example に反する。

補題3.

z ; T_1 の involution とすると $\Omega_1[S_0, t] = \langle z \rangle$ となる。$\exists t \in S-S_0$

証明) 一般に $B \neq S_0$ $B \underset{G}{\subsetneq} S_0$ とすると $\exists g \in G$, s.t $B^g \subseteq S_0$
$N_S(B)^g \subseteq S$ となることが S_0 が weakly closed なることより言える。
Z^*-theorem より $\exists k \in G$ $z^k \in S-S_0$ $t = z^k$ とおく。$|S_0 \cap S_0^k| : \max$ と
なるように k をとる。$A = S_0 \cap S_0^k$ とおく。$C = N_{S_0}(\langle A, t \rangle)$
前記のことから $\exists g_1 \in G$ $\langle A, t \rangle^{g_1} \subseteq S_0$ $C^{g_1} \subseteq S$, $A \subseteq S_0 \cap S_0^{g_1^{-1}}$
A の maximality より $A = S_0 \cap S_0^{g_1^{-1}}$

$C/A \simeq C^{g_1}/A^{g_1} = C^{g_1}/C_{C^{g_1}(S_0)} \subseteq S/C_S(S_0)$ $\quad |S/C_S(S_0)| = 2$

$D = C_{S_0}(t)$, $E = \{x \in S_0 \mid [x, t] \in D\}$ then $C \subseteq E$

$E \xrightarrow[\varphi]{} F = \Omega_1([S_0, t])$ このとき φ は onto homo となる。
$x \longmapsto [x, t]$ $\quad \ker \varphi = C_E(t) = D$

$E/D \simeq F$, $m(E/D) = m(E/C) + m(C/D)$

$E/C \simeq F/F\cap A \subseteq D/A$ よって $m(E/D) \leq m(C/D) + m(D/A)$

$|C/A| \leq 2$ よって $m(E/D) = 1$ 即ち $|\Omega_1[S_0, t]| = 2$

補題4. $|T_2| = |T_3| = \cdots = |T_n| = 2$ としてよい。

証明) $|T_1| = 2^l$ $|T_2| = 2^m$ $l, m \geq 2$ とする。

$T_1 = \langle x \rangle$, $T_2 = \langle y \rangle$ $x_1 = x^{2^{l-2}}$ $|x_1| = 4$

$[S_0 t]$: cyclic group より $\langle x^2 \rangle \supseteq \langle y^2 \rangle$ or $\langle x^2 \rangle \subseteq \langle y^2 \rangle$

$\langle x^2 \rangle \supseteq \langle y^2 \rangle$ としてよい。 $y^2 = (x^2)^k$, このとき $v = x_1 x^{-k} y$, ただし

$v^t = v$ or v^{-1} $v^t = v$ とすると $z \in Z^*(G)$ となり矛盾.

$(v x_1)^t = v^{-1} x_1^{-1} = v x_1 \in Z(S)$ $T_1 * T_2 = \langle x \rangle \times \langle v x_1 \rangle$

$(v x_1)^k \in S_0$ とする。 $\Omega_1(S_0) \subseteq Z(S)$ より $k \in N(S)$, k : odd order として

よい。 S_0 ; weakly closed より $k \in N(S_0)$ よって $(v x_1)^k \neq v x_1$ とす

ると $(v x_1)^k = z v x_1$ $(v x_1)^{k^2} = v x_1$ k と $v x_1$ は可換となり矛盾。

$T_2 = \langle v x_1 \rangle$ とあらためておきかえることより $|T_2| = \cdots = |T_n| = 2$ とし

てよい。

補題5. $O^2(G) \neq G$ または $Z^*(G) \neq 1$

証明) $T_1 = \langle x \rangle$ $T_i = \langle z_i \rangle$ $(i = 2, \ldots, n)$ $A = \langle z_2 \rangle \times \cdots \times \langle z_n \rangle$ とおく。

$C_{\langle x \rangle}(t) = \langle z \rangle$ より $\langle t \rangle \langle x \rangle$; dihedral or semi-dihedral-gp.

$\langle t \rangle \langle x \rangle$: dihedral のときを考える。

$U = \{ t x^l, z \mid l : \text{even} \}$ $V = \{ t x^k \mid k : \text{odd} \}$, U, V の involution はそれ

ぞれみな共役である。 S の involution の集合は $\bigcup_{a \in A} Ua \cup \bigcup_{b \in A} Vb \cup A^{\#}$

$t = z^g \in S - S_0$ S_0 ; weakly closed より $[A, g] = 1$ としてよい。

よって Ua の元も Va の元もそれぞれみな共役である。

$n = 1$ とすると S : dihedral or semi-dihedral となり G が counter-

-exampleに反する。よって $n \geq 2$ としてよい。

Z^*-theorem より $\exists k \in N(H)$ $C_S(H) \subseteq H$ 特に $\langle z \rangle \times A \subseteq H$ $z_2{}^k \in S - S_0$

$z_2^k \in U_a$ とすると $z_2 \sim za$ となり矛盾 $\therefore$ $z_2^k \in V_b$ $\exists b \in A$

このとき $z^k = z$ とすると $z_2 \sim z z_2$ となり矛盾.

よって $\forall a \in A$ $a^k \neq a$ or $(az)^k \neq az$

即ち a or U_a の元は V_c $\exists c \in A$ と共役である。V_b $(b \in A)$ の個数を数えることにより，z_2 は V_b $\exists! b \in A$ の元とのみ共役であることがわかる。このことより z_2 はある S の index 2 の subgroup の元に fuse しないことがわかり．Thompson の fusion Lemma より $O^2(G) \neq G$ となり矛盾を生じる。

$\langle t \rangle \langle x \rangle$; semi-dihedral のときは．前記の証明より $z_2 \in Z^*(G)$ がわかる。よっていずれの場合も矛盾を得る。

§ 3.

問題　G ; 有限単純群

S ; 2-Sylow-subgroup of G $|S : S_0| = 2$

$\exists t \in S_0$ $|t| = 2$

$\{t^g\} \cap S_0 \subseteq \langle t \rangle$ for $\forall g \in G$

このとき G は．どんな群となるか。