数理解析研究所講究録
278巻 1976年 82-84

A. Connesの最近の結果

東北大医短大　洲之内長一郎

1975年7月28日から8月15日まで Kingston でおこなわれた "Symposium on Ergodic Theory and Operator Algebras" は A. Connes 及び W. Krieger の最近の仕事，結果についての講演，そして「Groupoid」に関する講演が主なものであった。

この報告では A. Connes の最近の仕事の概略を述べる。

詳細は A. Connes : Classification of Injective factors. (preprint) にある。

以下 M は type II_1-factor とする。

J. T. Schwartz は M が <u>hyperfinite</u> であることより，M は <u>Property P</u> (i.e. $^\forall x\in B(\mathcal{H})$, $\overline{co}^w\{uxu^*; u\in M_u\}\cap M'\neq\phi$) をみたすことを示した。さらに Hakeda, Tomiyama によって上の性質より <u>Property E</u> (i.e. $^\exists$projection of norm one of $B(\mathcal{H})$ onto M) が導かれることを示した。

Arveson の仕事の後，C^*-tensor product の研究から，

Effros, Lance は Property E は <u>Injectivity</u> (i.e. ${}^\forall B, B_1$: C^*-algebra, $B \subset B_1$, ${}^\forall \varphi : B \longrightarrow A$; morphism, ${}^\exists \psi : B_1 \longrightarrow A$; morphism, which extend φ) と同値であることを示した。

Choi, Effros による injectivity と同値な次の条件は A. Connes の paper に使用される。

i.e. ${}^\forall \sigma$: self-adjoint $n \times n$-matrix (その全体を F_n とする),
${}^\forall S$: self-adjoint element of $M \otimes F_n$; $b \otimes \sigma \leqq S$
for some self-adjoint element b of $B(\mathcal{H})$,
${}^\exists x$: self-adjoint element of M ; $x \otimes \sigma \leqq S$。

Effros, Lance はさらに C^*-tensor product の研究から、<u>semi-discreteness</u> の概念を導入した。

(M が semi-discrete であるとは、the identity map on M が simple weak * convergence topology で finite rank の normal morphisms で近似出来る時に言う。

これは、次の2つの条件と同値である。

① $\eta : M \odot M' \longrightarrow B(\mathcal{H})$; $\eta(x \otimes y) = xy$ が isometric である。

② $C^*(M, M')$ が simple である。)

そして semi-discreteness から injectivity が出ることを示した。

A. Connes は実は上の性質は全て equivalent であることを示した。

その過程は，まず次のことを示す。

$C^*(M, M') \supset \{\text{compact operators of } \mathcal{H}\}$

$\Leftrightarrow$ M は property Γ をみたさない。

さらに，このことは，先に A. Connes によって Int M が closed in Aut M と同値であることが示されている。

次に Int M の closure をしらべている。

つまり，$\theta \in \overline{\mathrm{Int}\, M} \Leftrightarrow \| \sum_{i=1}^{n} \theta(a_i) b_i \| = \| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \|$

for $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subset M$, $\{b_i\}_{i=1}^{n} \subset M'$.

このことを使い，hyperfiniteness は S. Sakai による symmetry σ_M (i.e. $\sigma_M \in \mathrm{Aut}(M \otimes M)$; $\sigma_M(x \otimes y) = y \otimes x$) が $\overline{\mathrm{Int}(M \otimes M)}$ に入ることと同値であることを示すことによって話を進めている。

これらの議論，結果から，hyperfinite II_∞-factor は unique であること，all subfactors of the hyperfinite factor は又 hyperfinite であること，III_1 case を除いて，type III injective factor は Krieger's factor であること等の重要な結果を得ている。

(1975. 9. 30)