数理解析研究所講究録
278巻 1976年 63-72

コンパクト群による接合積における部分群と部分環の対応について

大阪教育大　　長田まりゑ

有限なフォン・ノイマン環$\mathcal{M}$と$\mathcal{M}$上の作用が自由な可算個の自己同型写像のなす離散的な群Gに対して、$\mathcal{M}$のGによる接合積を$G\otimes\mathcal{M}$で表わします。$\mathcal{M}$を含む$G\otimes\mathcal{M}$の全てのフォン・ノイマン部分環と、Gの全ての部分群との対応について、今までに知られている結果としましては、[3]，[4]及び[8]が、あります。[8]では、II_1-型ファクター$\mathcal{M}$に対して、この対応が与えられています。[3]では$\mathcal{M}$は可換なフォン・ノイマン環で、Gに対してGのfullな群[G]を考え、[G]の全てのfullな部分群と、$G\otimes\mathcal{M}$の$\mathcal{M}$を含む全てのフォン・ノイマン部分環の対応が与えられています。[4]は[3]の結果を一般の有限なフォン・ノイマン環$\mathcal{M}$に対して、拡張したものです。

ここでは必らずしも有限とは限らないフォン・ノイマン環$\mathcal{M}$と$\mathcal{M}$の自己同型写像のなす可換なコンパクト群Gに対して、$\mathcal{M}$を含む$G\otimes\mathcal{M}$のフォン・ノイマン部分環とGの閉部分群との

対応について、考えてみたいと思います。

§1. 正規な期待値と　離散な群による接合積

$\mathfrak{H}$を可分なヒルベルト空間、$\mathcal{M}$を$\mathfrak{H}$上のフォン・ノイマン環とし、Gを$\mathcal{M}$の自己同型写像のなす局所コンパクトな群とします。$\mathfrak{H}$の値をとるG上の連続函数で、コンパクトな台をもつもの全体のなすベクトル空間$K(\mathfrak{H}, G)$に、

$$(\xi, \eta) = \int_G (\xi(g), \eta(g))\, dg, \qquad \xi, \eta \in K(\mathfrak{H}, G)$$

によって内積を定義します。ただしdgはG上の左不変なハール測度です。この内積に関して、$K(\mathfrak{H}, G)$を完備化したものを$L^2(\mathfrak{H}, G)$で表わします。

ヒルベルト空間$L^2(\mathfrak{H}, G)$上への$\mathcal{M}$の表現πと、Gのユニタリ表現λを

$$(\pi(a)\xi)(g) = g^{-1}(a)\xi(g), \qquad a \in \mathcal{M}, \ g \in G,$$

$$(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \qquad g \in G, \ \xi \in L^2(\mathfrak{H}, G)$$

によって与えます。

πは正規な表現で、πとλは

$$\mathrm{Ad}\,\lambda(g)(\pi(a)) = \lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^* = \pi(g(a)), \quad (a \in \mathcal{M}, \ g \in G)$$

なる関係を充します。

$L^2(\mathfrak{H}, G)$上の$\pi(\mathcal{M})$と$\lambda(G)$によって生成されるフォン・ノイマン環を、$\mathcal{M}$のGによる接合積とよび([9])、$G \otimes \mathcal{M}$で表わします。

特にGが離散な群のときには、$G \otimes \mathcal{M}$から$\pi(\mathcal{M})$の上への、忠実正規な期待値eで、全ての$g \in G$ $(g \neq 1)$に対して、$e(\lambda(g)) = 0$をみたすものが存在する事がよく知られていますが、この逆も成立します。すなわち

(1.1) $\mathcal{M}$をフォン・ノイマン環$\mathcal{A}$のフォン・ノイマン部分環とし、Gを$\mathcal{M}$の自己同型写像のなす離散な群とする。uをGの$\mathcal{A}$の中へのユニタリ表現とし、$\mathcal{A}$は$\mathcal{M}$と$u(G)$によって生成されているとする。もし$\mathcal{A}$から$\mathcal{M}$の上への忠実正規な期待値eで、$e(u(g)) = 0$を全ての$g \in G$ $(g \neq 1)$に対して充すものが存在するならば、$\mathcal{A}$は$G \otimes \mathcal{M}$と同型で、その同型写像σは

$$\sigma(x) = \pi(x), \quad (x \in \mathcal{M}), \qquad \sigma(u(g)) = \lambda(g), \quad (g \in G)$$

を充す。

(証明) $\mathcal{M}$上の忠実正規な state ψに対して、$\varphi = \psi \circ e$とおくと、φは$\mathcal{A}$上の忠実で正規な state となる。φによる$\mathcal{A}$の表現空間上で$\mathcal{A}$を考える事によって、$\mathcal{A}$に対する cyclic な$\mathfrak{H}$の元ξで

$$(u(g)x\xi, \xi) = 0 \qquad (\forall_{\neq 1} g \in G, \quad \forall x \in \mathcal{M})$$

を充すものが存在すると仮定してもよい。

$\mathcal{M}\xi$の生成するヒルベルト空間を$\mathfrak{H}_0$で表わすと、ξの性質によって、$\mathfrak{H}$は直和空間$\sum_{g \in G} \oplus\, u(g)\mathfrak{H}_0$で表わされる。

そこで$\mathfrak{H}$から$\ell^2(\mathfrak{H}_0, G)$上への写像$w$を

$$w\left(\sum_{g\in G} u(g)\xi(g)\right) = \sum_{g\in G} \varepsilon(g)\otimes \xi(g), \quad (\xi(g)\in \mathfrak{H}_0)$$

（ただし、$\varepsilon(g)$はgの特性函数）

で、定義する。$\mathcal{A}$の元xに対して、$\sigma(x) = wxw^*$とおくと、σは$\mathcal{A}$から$G\otimes\mathcal{M}$の上への同型写像で、

$$\sigma(x) = \pi(x), \quad (x\in\mathcal{M}), \qquad \sigma(u(g)) = \lambda(g), \quad (g\in G)$$

を充している。

群Gがコンパクトなとき、(1.1)での$\mathcal{A}$と$G\otimes\mathcal{M}$が同型になる為の十分条件は[5]で、求められています。

次にGが局所コンパクトな可換群とします。Gの共役群$\hat{G}$の$L^2(\mathfrak{H}, G)$へのユニタリ表現μを

$$\mu(p)\xi(g) = \overline{\langle g, p\rangle}\,\xi(g), \quad \xi\in L^2(\mathfrak{H}, G),\ g\in G,\ p\in\hat{G}$$

（ただし、$\langle g, p\rangle$は、pのgでの値）

で与えると、次の２つの関係が成立します。

$$\mu(p)\pi(a)\mu(p)^* = \pi(a), \quad a\in\mathcal{M}, \quad p\in\hat{G},$$

$$\mu(p)\lambda(g)\mu(p)^* = \overline{\langle g, p\rangle}\,\lambda(g), \quad p\in\hat{G}, \quad g\in G。$$

従って、

$$p(x) = \mu(p)\,x\,\mu(p)^*, \quad p\in\hat{G}, \quad x\in G\otimes\mathcal{M},$$

とおいて、$\hat{G}$を$G\otimes\mathcal{M}$の自己同型写像のなす群とみなすことができます。同様にして、又$(G\otimes\mathcal{M})'$の自己同型写像のなす群とも考えることに致します。

(1.2). $\mathcal{M}$をフォン・ノイマン環、Gを$\mathcal{M}$の自己同型写像のなすコンパクトな可換群とし、Gは才二可算公理をみたすものとすると、$\pi(\mathcal{M})'$は、$(G \otimes \mathcal{M})'$の$\hat{G}$による接合積 $\hat{G} \otimes (G \otimes \mathcal{M})'$と同型である。

(証明) [9]の双対定理によって、

$$\pi(\mathcal{M}) = (G \otimes \mathcal{M}) \cap \mu(\hat{G})'$$

が成り立つから、$\pi(\mathcal{M})'$は$(G \otimes \mathcal{M})'$と$\mu(\hat{G})$によって生成されている。dgを、群Gの正規化されたハール測度とし、$\pi(\mathcal{M})'$の元xに対して、

$$e(x) = \int_G \lambda(g)\, x\, \lambda(g)^*\, dg$$

とおく。eは$\pi(\mathcal{M})'$から$(G \otimes \mathcal{M})'$の上への忠実正規な期待値となって、$e(\mu(p)) = 0$ を全ての$p \in \hat{G}$ $(p \neq 1)$に対して、充す。従って、(1.1)によって、$\pi(\mathcal{M})'$は$\hat{G} \otimes (G \otimes \mathcal{M})'$と同型である。

§2. 部分群と部分環の対応

$\mathcal{M}$をII_1-型ファクター、Gを$\mathcal{M}$の外部自己同型写像のなす離散群とすると、$\pi(\mathcal{M})$を含む$G \otimes \mathcal{M}$の全てのフォン・ノイマン部分環$\mathcal{N}$と、Gの全ての部分群Kとは、

$$\mathcal{N} = (\lambda(K) \cup \pi(\mathcal{M}))'', \qquad K = \{g \in G;\ \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$$

という形で、1対1に対応することが[8]によって、知ら

れています。

ファクター$\mathcal{M}$が有限であるという条件を除くと、この結果は次のような形になります。

(2.1) $\mathcal{M}$をファクターとし、Gを$\mathcal{M}$上の作用が自由な自己同型写像のなす離散な可換群とする。$\mathcal{M}$を含むGの$\mathcal{M}$のフォンノイマン部分環で、Gの$\mathcal{M}$からの忠実な正規な期待値の値域である$\mathcal{N}$と、Gの部分群Kとの間に1対1の対応がつき、部分環$\mathcal{N}$に対応する群は

$$K(\mathcal{N}) = \{ g \in G ;\ \lambda(g) \in \mathcal{N} \}$$

となり、部分群Kに対応する部分環は

$$\mathcal{N}(K) = (\pi(\mathcal{M}) \cup \lambda(K))''$$

となる。

(証明) $\mathcal{N}$を条件を充すGの$\mathcal{M}$のフォン・ノイマン部分環とする。$e_{\mathcal{N}}$, $e_{\mathcal{M}}$をそれぞれGの$\mathcal{M}$から$\mathcal{N}$, $\pi(\mathcal{M})$の上への忠実正規な期待値とすると、全ての$g, h \in G$と全ての$a \in \pi(\mathcal{M})$に対し、

$$e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h))a = e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))h(a)\lambda(h))$$
$$= e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(gh(a)\lambda(g))\lambda(h)) = gh(a)\, e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h))$$

が成り立つ。仮定により、Gの元の作用が自由であるから、$gh \neq 1$ならば $e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h)) = 0$である。又、$gh = 1$ならば、$\mathcal{M}$がファクターであることより、$e_{\mathcal{M}}(e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))\lambda(h))$はスカラーとなるから $e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))$は全ての$g \in G$に対して、

$\lambda(g)$のスカラー倍となっている。従って$\lambda(g)\notin\mathcal{N}$ならば、$e_{\mathcal{N}}(\lambda(g))=0$である。$\mathcal{N}$の元は$\sum_{g\in G}\lambda(g)x(g)$と展開される事より、$K(\mathcal{N})=\{g\in G;\lambda(g)\in\mathcal{N}\}$とおくと、$\mathcal{N}$は$\lambda(K(\mathcal{N}))$と$\pi(\mathcal{M})$によって生成されていることがわかる。

逆に、Gの部分群Kに対して、$\mathcal{N}(K)=(\lambda(K)\cup\pi(\mathcal{M}))''$とおく。$K^{\circ}=\{p\in\hat{G};\langle g,p\rangle=1,\ \forall g\in K\}$とおき、$dp$は$K^{\circ}$の正規化されたハール測度とする。$G\otimes\mathcal{M}$の元$x$に対して、

$$e(x)=\int_{K^{\circ}}\mu(p)x\mu(p)^{*}dp$$

とおくと、eは$G\otimes\mathcal{M}$から$\mathcal{N}(K)$の上への忠実正規な期待値となる。$g\in G$が、$\lambda(g)\in\mathcal{N}$を充すならば、上の部分の証明と同様にして、$e_{\mathcal{M}}(\lambda(g)\lambda(k))=0$が全ての$k\neq g$なる$k\in K$に対して成り立ち、更に$g=k$がある$k\in K$に対して成り立つ。従って元の群$K$は$K=\{g\in G;\lambda(g)\in\mathcal{N}(K)\}$を充たしている。

次に群Gがコンパクト可換群のときを考えると、部分群と部分環の対応は次のようになります。

(2.2) $\mathcal{M}$をフォン・ノイマン環、Gを$\mathcal{M}$の自己同型写像のなすコンパクトな可換群とし、才二可算公理をみたすものとする。もし、$G\otimes\mathcal{M}$が、ファクターで、Gの作用が$G\otimes\mathcal{M}$上で、自由だとすると、Gの閉部分群Kと、$G\otimes\mathcal{M}$の$\pi(\mathcal{M})$を含むフォン・ノイマン部分環$\mathcal{N}$で、$\mathcal{N}'$が$\pi(\mathcal{M})'$からの忠実正規な

期待値の値域となっているものとの間に、1対1の対応がつき、部分群Kに対応する部分環は

$$\mathcal{N}(K) = (\pi(\mathcal{M}) \cup \lambda(K))''$$

となり、部分環$\mathcal{N}$に対応する部分群は、

$$K(\mathcal{N}) = \{g \in G ; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$$

となる。

（証明）$\mathcal{N}$を条件をみたす$G\otimes\mathcal{M}$のフォン・ノイマン部分環とすると、(1.2)によって、$\mathcal{N}'$は、$\hat{G}\otimes(G\otimes\mathcal{M})'$の$\pi((G\otimes\mathcal{M})')$を含むフォン・ノイマン部分環と同型になっている。$\mathcal{N}'$に対して、$F = \{p \in \hat{G} ; \mu(p) \in \mathcal{N}'\}$とおくと、(2.1)によって、$\mathcal{N}'$は$\mu(F)$と$(G\otimes\mathcal{M})'$によって生成されている。$\mathcal{N}$に対して、$K(\mathcal{N}) = \{g \in G ; \lambda(g) \in \mathcal{N}\}$とおくと、

$$K(\mathcal{N}) = F^{\perp} = \{g \in G ; \langle g, p \rangle = 1, \ \forall p \in F\}$$

をみたす。従って、

$$\mathcal{N}' = (\mu(F) \cup (G\otimes\mathcal{M})')'' = \lambda(K(\mathcal{N}))' \cap \pi(\mathcal{M})'$$

となり、$\mathcal{N} = (\lambda(K(\mathcal{N})) \cup \pi(\mathcal{M}))''$が得られる。

逆に、KをGの閉部分群とする。$\mathcal{N}(K)$を$\lambda(K)$と$\pi(\mathcal{M})$によって生成されたフォン・ノイマン環とする。$\hat{G}$の元pに対して、$p \in K^{\circ}$なることと、$\mu(p) \in \mathcal{N}(K)'$なることとは同値であり、$\mu(p) \in \mathcal{N}(K)'$なることと、$p \in K(\mathcal{N}(K))^{\circ}$なることとは同値である。従って、元の群$K$は、$K = \{g \in G ; \lambda(g) \in \mathcal{N}(K)\}$

をみたしている。

極く最近，[2]の定理4.1において，Mをファクター，Gを局所コンパクトな可換群としたとき，$\pi(M)$を含む$G \otimes M$のフォン・ノイマン部分環Nで，$p(N)=N$を全ての$p \in \hat{G}$に対してみたすものと，$\hat{G}$の閉部分群$\hat{H}$の間に，1対1の対応がつき，その対応のもとで，

$$N(\hat{H}) = G \otimes M \cap \mu(\hat{H})', \qquad \hat{H}(N) = \mu(\hat{G}) \cap N'$$

となっている事が示されています。

従って，ここでのNに対する条件；$p(N)=N$ $({}^{\forall}p \in \hat{G})$と，(2.2)における$N$に対する条件；$N'$は$\pi(M)'$からの忠実正規な期待値の値域である，とは同値な条件であることがわかります。

—— 参考文献 ——

[1] M. Choda ; Normal expectations and crossed products of von Neumann algebras, proc. Japan Acad., 50(1974), 738 - 742.

[2] A. Connes and M. Takesaki ; The flow of weights on factors of type III, preprint.

[3] H. A. Dye ; On groups of measure preserving

transformations II, Amer. J. Math., 85 (1963), 551 – 576.

[4] Y. Haga and Z. Takeda ; Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 24 (1972), 781 – 789.

[5] Y. Haga ; Crossed product of von Neumann algebras by compact groups, preprint.

[6] R. R. Kalman ; A generalization of free action, Duke Math. J., 36 (1969), 781 – 789.

[7] M. B. Landstad ; Duality theory for covariant systems, preprint.

[8] M. Nakamura and Z. Takeda ; On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 489 – 492.

[9] M. Takesaki ; Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math., 131 (1973), 249 – 310.

[10] G. Zeller-Meier ; Produits croises d'une C*-algebre par un groupe d'automorphisms, J. de Math. Pures et Appliquees, 47 (1968), 101 – 239.