数理解析研究所講究録
278巻 1976年 11-22

Analyticity in Operator Algebras

山形大　理　河村新蔵

Mを可分なヒルベルト空間、$\mathfrak{H}$、上のvon Neumann環、$\{\alpha_t\}$をM上の一径数$*$同型群とする。$\{\alpha_t\}$の連続性については任意の$x \in M$と$\varphi \in M_*$（Mのpre-dual）に対して、$t \longrightarrow \langle \alpha_t(x), \varphi \rangle$が連続であるとする。$H^\infty(\alpha)$を次の条件(A)を満たす$x \in M$の全体とする。

(A)　$t \longrightarrow \langle \alpha_{-t}(x), \varphi \rangle$　が上半平面へ有界かつ解析的な関数として拡張できる。

本稿では、$H^\infty(\alpha)$が極大なsubdiagonal環[1]である事を示す。

[1]のsubdiagonal環の研究はKadison-Singer[5]のtriangular環の研究に続くnon-self adjointな環の構造を調べたものである。いずれの環に於てもトーラス($\mathbb{T}$)上のDisk環の議論が基本的であった。一般化された解析関数の話として、Arens-Singer[3]、matrix-valuedな解析関数の研

究として，Heisen－Lowdenslager［4］が有る。任意の$t \in \mathbb{R}$に対し，$e^{ix} \to e^{i(x+t)}$ （$e^{ix} \in \mathbb{T}$）なる$\mathbb{T}$上の変換を考えれば，$\mathbb{R}$は$\mathbb{T}$上のflowと考える事ができ，Disk環はこのflowに関して解析的な関数と考える事ができる。Muhly（［10］［11］［12］［13］）はこのflowの立場からweak＊Dirichlet環を扱かった。我々の$H^\infty(\alpha)$はvon Neumann環上の一径数＊同型群によって決定されるが，富田－竹崎理論［17］によって一径数＊同型群は充分沢山の例が与えられる。この理論による1径数＊同型群，modular同型群は可換の場合は全てtrivialになる事より，この例は非可換的な代表的なものである。又Arveson［1］の例は殆んどこの一径数＊同型群によって決定される$H^\infty(\alpha)$の立場よりみる事ができる［8］。更に$H^\infty(\alpha)$は不変部分空間の議論とも関わりがあり，［7］によればある条件のもとで，$H^\infty(\alpha)$はweak-denseな（σ-weakly closedではあるが）reductive algebraになる。

§1．C^*環上のanalytic汎関数．　AをC^*－環，$\{\alpha_t\}$をA上の強連続一径数同型群とする。この時$a \in A$のスペクトルを次の様に定義する。任意の$a \in A$と$f \in L^1(R)$に対し，

$$a \underset{\alpha}{*} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\alpha_t(a)\,dt$$

とする。　aのスペクトル，$Sp_\alpha(a)$，をideal，$\{f \in L^1(R)$

$a \underset{\alpha}{*} f = 0\}$ の hull として定義する。この時、$A(\alpha) = \{a \in A;$ $Sp_\alpha(a) \subset [0, \infty)\}$ とする。

$a \in A(\alpha) \Leftrightarrow$ 任意の $\varphi \in A^*$ (A の dual space) と $\mathrm{supp}\,\hat{f}$ $\subset [\varepsilon, \infty)$ ($\varepsilon = \varepsilon_f > 0$) なる任意の $f \in L^1(R)$ に対し、$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(\alpha_{-t}(a))\,dt = 0$

右の条件は、関数 $t \to \varphi(\alpha_{-t}(a))$ が上半複素平面上の有界かつ解析的な関数に拡張できる必要十分条件である。$\varphi \in A^*$ が解析的であるとは、任意の $a \in A$ に対して、$t \to \varphi(\alpha_{-t}(a))$ が解析的である事を言う。φ が解析的であるという事と φ が $A(\alpha)_0 = \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} A[\varepsilon, \infty)}$, ($A[\varepsilon, \infty) = \{a \in A;$ $Sp_\alpha(a) \subset [\varepsilon, \infty)\}$) 上で vanish する事は同値である [2, Prop. 5.1].

$\varphi \in A^*$ と $f \in L^1(R)$ に対し、$\langle a, \varphi \underset{\alpha}{*} f \rangle \equiv \langle a \underset{\alpha}{*} \hat{f}, \varphi \rangle$ ($\hat{f}(t) = f(-t)$) によって A 上の汎関数 $\varphi \underset{\alpha}{*} f$ を定義する。この時 φ のスペクトル, $Sp_\alpha(\varphi)$ を *ideal*, $\{f \in L^1(R);$ $\varphi \underset{\alpha}{*} f = 0\}$ の *hull* とする。φ の解析性とスペクトルの関係について次の結果がある。

(1.1) φ が解析的である。$\Leftrightarrow$ $Sp_\alpha(\varphi) \subset (0, \infty)$

(1.2) φ が α_t-不変である。$\Leftrightarrow$ $Sp_\alpha(\varphi) = \{0\}$

W. Arveson [2] によれば $\varphi \in A^*$ が解析的ならば $|\varphi|$ による A の G.N.S 構成は covariant 表現となる。これは、F. M.

Rieszの定理の非可換的拡張である。この時$|\varphi|$による表現、$\pi_{|\varphi|}$は次の様になっている。

(i) $\varphi(a)=(\pi_{|\varphi|}(a)\xi, V\xi)$, $V^*V\xi=\xi$

ξ: cyclic vector on $\mathfrak{H}_{|\varphi|}$ V; partial isometry $\in\pi_{|\varphi|}(A)'$

(ii) $\pi_{|\varphi|}(\alpha_t(a))=U_t\pi_{|\varphi|}(a)U_t^*$

$U_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{its}dp(s)$ $P[t,\infty)\mathfrak{H}=\bigcap_{s<t}[\pi_{|\varphi|}(A(s,\infty))\xi]$

§2 Subdiagonal algebra Mをvon Neumann環、$\{\alpha_t\}$をM上の弱連続一径数$*$同型群とする。§1と同様に$x\in M$と$\varphi\in M_*$に対して、$Sp_\alpha(x)$, $Sp_\alpha(\varphi)$を定義する。C^*-環の場合と同様に考えれば、解析環$H^\infty(\alpha)$は$Sp_\alpha(x)\subset[0,\infty)$なる$x\in M$全体となる。$C^*$-環に於る解析環$A(\alpha)$とvon Neumann環に於る解析環$H^\infty(\alpha)$の関係について次の事を注意しておく。$A$を$C^*$-環、$\{\alpha_t\}$を強連続一径数$*$同型群、$\varphi$を$\alpha_t$-不変な$A$上汎関数とする。($\varphi\geq0$とする)この時$\varphi$による$A$のG.N.S.構成$(\pi_\varphi(A),\mathfrak{H}_\varphi)$を考えれば、自然な形で$\overline{\pi_\varphi(A)}$上に弱連続一径数$*$同型群$\{\bar{\alpha}_t\}$が与えられる。$A_\alpha$を$A$の$\alpha_t$-不変なvector全体、$\overline{\pi_\varphi(A)}_\alpha$を$\overline{\pi_\varphi(A)}$の$\bar{\alpha}_t$-不変なvector全体とする。この時、$\overline{\pi_\varphi(A)}_\alpha=\overline{\pi_\varphi(A_\alpha)}$ならば$H^\infty(\bar{\alpha})=\overline{\pi_\varphi(A(\alpha))}$である[8]。ここでは$(A,\alpha_t)$に対し$\alpha_t$-不変なstateによる表現を考え初めからvon Neumann環の場合

$(\mathcal{M},\alpha)$ に限る。$H^\infty(\alpha)_0=\overline{\bigcup_{\varepsilon>0}\{x\in\mathcal{M};\ Sp_\alpha(x)\subset[\varepsilon,\infty)\}}$ とすれば、$\varphi\in\mathcal{M}_*$ の解析性について §1 と同様に次の事が成り立つ。

(2.1) $Sp_\alpha(\varphi)\subset[0,\infty)\iff\varphi=0$ on $H^\infty(\alpha)_0$。

(2.2) $Sp_\alpha(\varphi)\subset\{0\}\iff\varphi$ が α_*−不変である

$(\mathcal{M},\alpha)$ に対して $\mathcal{M}$ 上に normal な α_*−不変な state が充分沢山あるとしよう。即ち[9]の意味で α−finite である。この時[9]より $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}_\alpha$ への conditional expectation, Φ, が存在する。$H^\infty(\alpha)$ が次の意味で Φ に関して極大な subdiagonal 環である事を示すので本稿の目的である。

[定義] $\mathcal{M}$; 可分なヒルベルト空間上の von Neumann 環,
$\Phi:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$; faithful normal positive で idempotent な線型写像

$\mathcal{M}$ の部分環, $\mathfrak{A}$, が Φ に関して subdiagonal である

$\iff$

(1) $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}^*$ が $\mathcal{M}$ で σ−weakly dense

(2) $\Phi(xy)=\Phi(x)\Phi(y)\quad\forall x,\ y\in\mathfrak{A}$

(3) $\Phi(\mathfrak{A})\subseteq\mathcal{D}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$

(4) $\mathcal{D}=\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*\ni 1$

[注] $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$ が $\mathcal{M}$ の中で極大な可換∗部分環の時、$\mathfrak{A}$ は

triangulur 環である[5]。

[定義]　$\mathfrak{A}(\subset \mathcal{M})$；$\Phi$に関して subdiagonal である
$\mathfrak{A}$が極大である。$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{B}$が$\mathfrak{A}$を含むΦに関する sub-diagonal 環($\subsetneqq \mathcal{M}$)であるならば $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$となる。

W. Arveson は[1]に於て極大な subdiagonal 環の例をいくつか示した。亀井[6]によれば、有限な von Neumann 環における anti-symmetric で有限な subdiagonal 環は極大である。即ち、$(\mathcal{M}, \mathfrak{A}, \Phi)$に対して$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^* = \mathbb{C}1$で$\Phi$-不変な有限な trace, τ, が存在する時、$\mathfrak{A}$は極大である。この時 $\Phi(x)=\tau(x)1$　$(x\in\mathcal{M})$である。しかし、一般に subdiagal 環(σ-closedな)が極大であるか否か解かっていない。

[定理]　$\mathcal{M}$; von Neumann 環。　$\{\alpha_t\}$；弱連続な一径数*同型群。$\mathcal{M}$上に normal なα_t-不変な state が充分沢山あるとする(α-finite)。この時、conditional expectation, Φ, $\mathcal{M}\rightarrow\mathcal{M}_\alpha$ が存在する。　$H^\infty(\alpha)=\{x\in\mathcal{M};\ \mathrm{Sp}_\alpha(x)\subset[0,\infty)\}$
$\Rightarrow$ $H^\infty(\alpha)$はΦに関して極大な subdiagonal 環である。

〔証明〕〔I〕. $H^\infty(\alpha)$がsubdiagonalである事。

(3)(4)は明らか。

(1) φを$\varphi(H^\infty(\alpha)+H^\infty(\alpha)^*)=0$なる$\sigma$-weaklyで連続な線型汎関数とする。$\varphi(H^\infty(\alpha))=0$なので、(2.1)より$Sp_\alpha(\varphi)\subset[0,\infty)$。同様に$\varphi(H^\infty(\alpha)^*)=0$より$Sp_\alpha(\varphi)\subset(-\infty,0]$。結局、$Sp_\alpha(\varphi)\subset\{0\}$でこれは$\varphi$が$\alpha_t$-不変という事(2.2)であるから$\varphi(x)=\varphi(\Phi(x))$。一方、$\Phi(x)\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$であるから、$\varphi(\Phi(x))=0$。故に$\varphi=0$。

(2) Φが$H^\infty(\alpha)$でmultiplicativeである事を言う為には、$H^\infty(\alpha)_\Phi=\{x\in H^\infty(\alpha);\ \Phi(x)=0\}$が$H^\infty(\alpha)$の中でidealである事を言えば充分。

$\{x\in M;\ Sp_\alpha(x)\subset(0,\infty)\}(\subset H^\infty(\alpha))$は$H^\infty(\alpha)$の中でidealであってその$\sigma$-weakly closure, $H^\infty(\alpha)_0$,も又idealである。従って$H^\infty(\alpha)_\Phi=H^\infty(\alpha)_0$を示せば良い。

$x\in M$に対し、$Sp_\alpha(x)\subset[\varepsilon,\infty)$ $(\varepsilon>0)$ならば、xのスペクトルはα_t-不変であるから、xのαによるconvex hull, $K_0(x,\alpha)$はスペクトル部分空間, $M^\alpha([\varepsilon,\infty))$に含まれる。その closure, $K(x,\alpha)$も同様であるから,

$\Phi(x)=K(x,\alpha)\cap M_\alpha\subset M^\alpha([\varepsilon,\infty))\cap M^\alpha(\{0\})=M^\alpha(\{\phi\})=0$。

即ち、$x\in H^\infty(\alpha)_\Phi$であるから、$H^\infty(\alpha)_0\subset H^\infty(\alpha)_\Phi$である。

ここで、$H^\infty(\alpha)_0\subsetneqq H^\infty(\alpha)_\Phi$と仮定しよう。即ち、$H^\infty(\alpha)_0$に属

さない$H^\infty(\alpha)_\Phi$の元、x が存在するから Hahn-Banachの定理より、$\varphi(x)=1$ かつ $\varphi(H^\infty(\alpha)_0)$ なるM_*の元がある。

$$F(t)=\langle \alpha_t(x),\varphi\rangle$$

とすれば、Fは$\mathbb{R}$上の有界な連続関数で、$L^1(R)$に関する、スペクトル, $Sp(F)$, に対し、

$$Sp(F)\subset -Sp_\alpha(x)\cap Sp_\alpha(\varphi)\subset(-\infty,0]\cap[0,+\infty)=\{0\}$$

$(x\in H^\infty(\alpha)_\Phi\subset H^\infty(\alpha)\Rightarrow Sp_\alpha(x)\subset(-\infty,0],\ \varphi(H^\infty(\alpha)_0)=0\Rightarrow Sp_\alpha(\varphi)\subset[0,+\infty))$

より、Fは$\mathbb{R}$上 constant な関数である。$F(t)=F(0)$ より、$\langle\alpha_t(x),\varphi\rangle=\langle x,\varphi\rangle=1$ $(\forall t\in\mathbb{R})$。故にφは $K(x,\alpha)$ 上では 1 である。$\Phi(x)\in K(x,\alpha)$ であるから、$\varphi(\Phi(x))=1$。これは $\Phi(x)=0$ と矛盾する。故に $H^\infty(\alpha)_0=H^\infty(\alpha)_\Phi$ で、Φは multiplicative on $H^\infty(\alpha)$ である。

[II] 極大性

$H^\infty(\alpha)_m=\{x\in M;\ \Phi(H^\infty(\alpha)_\Phi\, x\, H^\infty(\alpha))=\Phi(H^\infty(\alpha)\, x\, H^\infty(\alpha)_\Phi)=0\}$ とすれば、$H^\infty(\alpha)_m\supset H^\infty(\alpha)$ で $H^\infty(\alpha)_m$ は極大な sub-diagonal 環である事が解っている [1, Th 2.2.1]。

$H^\infty(\alpha)_m=H^\infty(\alpha)$ を示す為に $H^\infty(\alpha)_m\supsetneqq H^\infty(\alpha)$ とする。即ち、$H^\infty(\alpha)$ に属さない $H^\infty(\alpha)_m$ の元 x が存在する。$x\in H^\infty(\alpha)_m$ より、$\alpha_t(x)\in H^\infty(\alpha)_m$ である。($\because$ $H^\infty(\alpha)_\Phi$ と $H^\infty(\alpha)$ は α_tに関して不変であるから、$\Phi(y\alpha_t(x)z)=\Phi(\alpha_{-t}(y)x\alpha_{-t}(z))=0$ $\forall y\in H^\infty(\alpha)_\Phi$ $\forall z\in H^\infty(\alpha)$)。

故に、任意の $f \in L^1(R)$ に対し、

$$x *_\alpha f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\alpha_t(x)\,dt \in H^\infty(\alpha)_m$$

である。$x \notin H^\infty(\alpha)$ より $Sp_\alpha(x) \cap (-\infty, 0) \neq \phi$ 。即ち、$\mathrm{supp}\,\hat{f} \subset (-\infty, -\varepsilon]$ $(\varepsilon = \varepsilon_f > 0)$ なる $f \in L^1(R)$ が存在して $x *_\alpha f \neq 0$ である。$Sp_\alpha(x *_\alpha f) \subset (-\infty, -\varepsilon]$ より $Sp_\alpha((x *_\alpha f)^*) \subset [\varepsilon, \infty)$ であるから $(x *_\alpha f)^* \in H^\infty(\alpha)_\Phi$ である。Φ は $H^\infty(\alpha)$ $(\supset H^\infty(\alpha)_\Phi)$ 上 multiplicative であるから、 $\Phi((x *_\alpha f)^*(x *_\alpha f)) = \Phi((x *_\alpha f)^*)\Phi(x *_\alpha f) = 0$ 。Φ は faithful、故に $(x *_\alpha f)^*(x *_\alpha f) = 0$ 。これは $x *_\alpha f \neq 0$ に矛盾する。 [証明終]

§3. Periodic Modular Automorphism Group の場合。

von Neumann 環、M、が period $T > 0$ の faithful homogeneous periodic state, φ, を持つとする。$k = e^{-2\pi/T}$ とする。ここで、homogeneous と言うのは、この state と不変な M 上の同型写像全体が M でエルゴード的（この同型写像に関して不変な M の元はスカラーに限る）である事を言う。σ^φ を modular automorphism group とする。竹崎 [16] によれば次の結果が成り立つ。

(1) $M_0 = \{x \in M;\ \sigma_t^\varphi(x) = x\}$ は type II_1

(2) $M_n = \{x \in M;\ \sigma_t^\varphi(x) = k^{int}x\}$ に対し、

$$\mathcal{M} = \cdots \oplus \mathcal{M}_{-n} \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{-1} \oplus \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n \oplus \cdots$$

(この意味は、$x \in \mathcal{M}$ に対し、$x\xi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x)\xi_0$ in $\mathfrak{H}_\varphi$ ξ_0 は cyclic vector で、$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{T}\int_0^T k^{-int}\sigma_t^\varphi(x)\,dt$ と言う事である。)

この時、$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}^{\sigma^\varphi}(\{n\})$

$$H^\infty(\alpha) = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n \oplus \cdots$$

$$H^\infty(\alpha)_0 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots$$

$$\Phi = \varepsilon_0 \quad \text{i.e} \quad \Phi(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^\varphi(x)\,dt$$

となり、$H^\infty(\alpha)$ は Φ に関して subdiagonal(極大な)である。尚、一般の periodic な場合については、K-S-斉藤[14]の結果がある。

参考文献

[1] W. B. Arveson, *Analyticity in operator algebras*, Amer. J. Math., 89 (1967), 578-642

[2] ――――――, *On groups of automorphisms of operator algebras*, J. of Functional Analysis, 15 (1974), 217-243.

[3] R. Arens and I. M. Singer, *Generalized analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956), 379-393

[4] H. Helson and D. Lowdenslager, *Prediction theory and Fourier*

series in several variables, Acta Math., 99 (1958), 165-202.

[5] R. Kadison and I. M. Singer, Triangular operator algebra, Amer. J. Math., 82 (1960), 227-259.

[6] N. Kamei, Simply invariant subspace theorems for antisymmetric finite subdiagonal algebras, Tôhoku Math. J. 21 (1969), 467-473.

[7] R. I. Loebl and P. S. Muhly, Reductive algebras and automorphism groups of von Neumann algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 759-761

[8] S. Kawamura and J. Tomiyama, On the subalgebras of analytic operators associated with a flow on an operator algebra (in preparation)

[9] I. Kovács and J. Szücs, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, Acta Sci. Math., 27 (1966), 233-246

[10] P. S. Muhly, Function algebras and flows I, Acta Sci. Math., 35 (1973), 111-121.

[11] ————, Function algebras and flow II, Ark Math. 11 (1973), 203-213.

[12] ————, Function algebras and flow III, Math. Z.

136 (1974), 253 – 260.

[13] ————, Function algebras and flow IV, (to appear)

[14] K-S-Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra. (to appear)

[15] 富山 淳, Function algebra と flow (数学に掲載予定)

[16] M. Takesaki, The structure of a von Neumann algebra with a homogeneous periodic state, Acta Math., 131 (1973), 79 – 127.

[17] M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math. 128, Springer-Verlag, 1970.