数理解析研究所講究録
280巻 1976年 85-93

Spin(4,1) 上の球函数の展開について

早大 理工　大豆生田雅一

§1 序　Harish-Chandra は [2] に於て半単純リー群 G 上のある種の球函数の指数函数の巾による展開を与えたが，これは，G 上の Paley-Wiener 型定理，特に逆 Fourier 変換の性質の研究に重要な意義を持つ。しかし，この展開に現れる「係数」はルート系に関する複雑な induction によって与えられているので，一般には詳しい性質は明らかではない。ここでは G = Spin(4,1) に対し，この展開の「特異点」の分布を求める。これは Spin(4,1) 上の Paley-Wiener 型定理の証明に必要となる。([3])．

§2 Harish-Chandra による $E(z,\nu,x)$ の展開

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ によって複素数体，実数体，整数環を表わす。又，$k=\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ 上の線型空間 E, E' に対して，E から E' への線型写像（k 上の）全体を $\mathrm{Hom}_k(E, E')$ と書く。

$G=\mathrm{Spin}(4,1)$，K をその極大コンパクト部分群，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ を

各々のリー環，又対応する Cartan involution を θ とする。$G=KAN$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ を岩沢分解，対応する $g\in G$ の分解を $g=k(g)\exp H(g)\,n(g)$　$k(g)\in K$，$H(g)\in\mathfrak{a}$，$n(g)\in N$ とする。α を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ に関する正の制限ルートとすれば，$\mathbb{C}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ とは $z\leftrightarrow z\alpha$ によって同一視出来る。又，W を $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の Weyl 群とすれば，W は K の中心の位数2の部分群と同一視出来る。W の単位元を e，位数2の元を s と書くと，$s\alpha=-\alpha$ によって $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ 上作用する。

M を $\mathfrak{a}$ の K に於ける中心化群，(τ_i,V_i) $(i=1,2)$ を K の既約ユニタリ表現，このとき，$V_M=\{v\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1);\ \tau_1(m)v=v\tau_2(m)\ \forall m\in M\}$ とおく。又 τ_i を $\mathfrak{k}$ の展開環の表現へ拡張し，再び同一の記号 τ_i で表わす。

そこで，$z\in\mathbb{C}$，$v\in V_M$，$x\in G$ に対して，

(1)　$E(z,v,x)=\int_K e^{(z-\frac{3}{2})\alpha(H(xk))}\,\tau_1(k(xk))\,v\,\tau_2(k^{-1})\,dk$.

ここで dk は K の正規化された Haar 測度とする。

$V^M=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_M,V_M)$，$H\in\mathfrak{a}$，$\alpha(H)=1$ となる H に対して，$a_t=\exp(tH)$ $(t\in\mathbb{R})$ とおく。すると Harish-Chandra による $E(z,v,a_t)$ の展開定理は次の様になる。（[2] 及び，[6] の 9 章）

<u>命題 1</u>　V^M に値をとる $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 C_w $(w\in W)$

と，V_M に値をとる有理函数 Γ_R $(R=0,1,2,\cdots)$ が存在して，次の性質を満す：

(2) $E(z, v, a_t) = \Phi(z,t) C_e(z) v + \Phi(-z,t) C_o(z) v$

$z \in \mathbb{R}$ $t>0$, $v \in V_M$.

(3) $\Phi(z,t) = e^{(z-\frac{3}{2})t} \sum_{R=0}^{\infty} \Gamma_R(z) e^{-Rt}$ $t \in \mathbb{R}$ $t>0$.

但し，この等式は (1) の適当な open dense な部分集合 $O(\tau_1, \tau_2)$ 上の正則函数として成立する．

注意。Γ_R は R に関する帰納的な等式によって定義される。又，この等式は τ_1, τ_2 によって定められる。$t>0$ を固定したとき $\Phi(z,t) C_e(z)$, $\Phi(-z,t) C_o(z)$ は $O(\tau_1, \tau_2)$ 上正則であるが，(1) 上有理型に解析接続出来る。

以下の議論は $t>0$ を固定したときの $z \mapsto \Phi(z,t)$ の特異点の性質と分布を扱う。

§3 Γ_R, および C_ω の計算

K, M の既約ユニタリ表現の同値類の全体をそれぞれ，$\hat{K}$, $\hat{M}$ で表わす。表現の highest weight を考えれば，

$\hat{K} = \{ (n,n') ; n, n' \in \mathbb{Z}$ $n-n' \in \mathbb{Z}$ $|n'| \leq n \}$

$\hat{M} = \{ n'' ; n'' \in \mathbb{Z}$ $n'' \geq 0 \}$

と同一視出来る。

$\tau \in (n, n') \in \hat{K}$ に対して

$\hat{M}(\tau) = \{ n'' \in \hat{M} ;\ |n'| \leq n'' \leq n \quad n - n' \in \mathbb{Z} \}$.

又, $\tau_i \in (n_i\ n_i') \in \hat{K}$ $i = 1, 2$ に対して

$\hat{M}(\tau_1, \tau_2) = \hat{M}(\tau_1) \cap \hat{M}(\tau_2)$

と書く。

$\omega_M = 4 \times M$ の Casimir 作用素とすると $\sigma \in (n'') \in \hat{M}$ に対して, $\sigma(\omega_M) = n''(n''+1)\, id_\sigma$ (id_σ は σ の表現空間上の恒等作用素). 又 $(n'') \in \hat{M}(\tau)$ に対し.

$$C_{n''}(z, \tau) = \frac{\varepsilon^{2n''}\ 2^{-2z+3}\, \Gamma(2z)\, \Gamma(-z+\frac{3}{2}+n)\, \Gamma(-z+\frac{1}{2}-|n'|)}{\Gamma(-z+\frac{3}{2}+n'')\, \Gamma(-z+\frac{1}{2}-n'')\, \Gamma(z+\frac{3}{2}+n)\, \Gamma(z+\frac{1}{2}-|n'|)}$$

とする。

ここで, $\varepsilon = \begin{cases} -1 & n' < 0 \\ 1 & n' \geq 0 \end{cases}$

又, Γ は普通の Γ-函数とする。

<u>命題2</u>

1) $\hat{M}(\tau_1, \tau_2) \neq \emptyset \iff V_M \neq \{0\}$.

2) $\hat{M}(\tau_1, \tau_2) \neq \emptyset$ とする。各 $p \in \hat{M}(\tau_1, \tau_2)$ に対して $V_p \neq 0 \in V_M$ が存在して. $\tau_1(\omega_M) V_p = V_p \tau_2(\omega_M) = p(p+1) V_p$ であり. $\{ V_p ;\ p \in \hat{M}(\tau_1, \tau_2) \}$ が V_M の基底となる。

又, $i = 1, 2$ に対し, 次の等式が成立する。

(5) $\int_{\bar{N}} e^{-(z+\frac{3}{2})\alpha H(\bar{n})}\ V_p \tau_i(k(\bar{n}), \theta)^{-1}\, d\bar{n} = C_p(z, \tau_i) V_p$.

ここで $d\pi$ は $\overline{N} = \exp \mathfrak{n}$ 上の Haar 測度であり，$\int_{\overline{N}} e^{-2\rho H(\pi)}\, d\pi = 1$ となる様に正規化されているものとする。また，$\mathrm{Re}\, z > 0$ とする。

(6) $$\begin{cases} C_e(z) V_p = C_p(z, \tau_2)\, V_{p\tau_2(\Lambda)} \\ C_\theta(z) V_p = C_p(-z, \tau_1)\, V_{p\tau_2(\Lambda)} \end{cases} \qquad p \in \hat{M}(\tau_1, \tau_2)$$

より，$T_R(z) V_p = \sum_{q \in \hat{M}(\tau_2, \tau_2)} T_R(z, p, q) V_q$ と書き表わすとき，$a_{r,q}, b_q \in \mathbb{C}$ が存在して，

(7) $$\{2Rz - R^2 + p(p+1) - q(q+1)\} T_R(z, p, q)$$
$$= 6 \sum_{j \geq 1} \{z - (\tfrac{3}{2} + R - 2j)\} T_{R-2j}(z, p, q)$$
$$+ 4 \sum_{j \geq 1} (2j-1) \sum_{r \in \hat{M}(\tau_1 \tau_2, p)} a_{rq}\, T_{R-2j-1}(z, p, r)$$
$$- 4 \sum_{j \geq 1} j\, b_q\, T_{R-2j}(z, p, q)$$

ここで，

$$T_R(z, p, q) \equiv 0 \qquad R < 0.$$
$$T_0(z, p, q) = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q. \end{cases}$$

また，$\hat{M}(\tau_1, \tau_2, p) = \{ r \in \hat{M}(\tau_1, \tau_2) \mid |r - q| \leq 1 \}$.

証明の概略.

まず，1) と 2) の前半は，K が $SU(2) \times SU(2)$ に同型であり，M がその対角部分群と考えられる ([4]) から，表

現の分岐律を適用すればよい。([1]) (5)の左辺は G の主系列の intertwining operator から得られる。(intertwining operator を type τ_i の K-finite ベクトルに作用させることの積分が得られる。) そこで、(5)の両辺の $\tau \in (n, n')$ に関する巡回公式を調べると、同一であることが分る。従って(5)は $n = |n| = p$ の場合に帰着され、この場合は、実際に積分を計算して得られる。(6)については[6]の9章, 9.1.6 と同様の議論によって与えられる。最後に(7)は T_K の定義式に於ける V_M 上の線型写像の V_P に関する行列要素を計算すればよいが、これは、積分が複雑な計算を必要とする。特に $\pi(K, M)$ の表現に関するより詳しい分岐律についての結果が必要となる。

§4 $\Xi(z, t)$ の「特異点」の分布.

$t > 0$ を固定したとき $z \mapsto \Xi(z, t)$ のベクトル値函数としての特異点を $\Xi(z, t)$ の特異点と呼ぶ。$t > 0$ を固定したとき $z \mapsto \Xi(z, t)$ の特異点の集合は命題1.により $\mathbb{C}$ の discrete な部分集合であることが分る。そこで Ξ の両辺の特異点の回りの Laurent 展開を考えることが出来る。(1)により $E(z, v, a_t)$ は z の函数として整函数である。そこで、Laurent 展開の係数の $t \to +\infty$ での行動を

考えると，(3)により，$z \mapsto \Theta(z,t)C_e(z)v$，$z \mapsto \Theta(-z,t)C_o(z)v$ の特異点は $t>0$ に無関係に定まり，1高々1位の極であることが結論出来る。故に「$\Theta(z,t)$ の特異点」が意味を持つ。さらに，(6)を考えれば，$z \mapsto \Theta(z,t)v_p$ は高々2位の極しか持たないことが分る。$\Theta(z,t)v_p$ の特異点について次の命題が成立する。

命題3 $\hat{M}(\tau_1,\tau_2) \neq \emptyset$ とする。$t \in \mathbb{R}$，$t>0$ および $p \in \hat{M}(\tau_1,\tau_2)$ を固定したとき $z \mapsto \Theta(z,t)v_p$ は $\mathbb{C}$ から V_M に値をとる有理型函数であり，その特異点は t に無関係に定まり，1位の極である。さらに次の点を除いては，函数 $\Theta(z,t)v_p$ は正則である。

1) $z=k$ $k>0$ $k-p \in \mathbb{Z}$

2) $z=k+\frac{1}{2}$ $k \in \hat{M}(\tau_1,\tau_2)$，$p<k$

3) $z=k+\frac{1}{2}$ $2k \in \mathbb{Z}$，$p-k \in \mathbb{Z}$，$0 \leq k < \min(m_1', m_2')$

4) $z=-k-\frac{1}{2}$ $k \in \hat{M}(\tau_1,\tau_2)$ $k<p$

証明の概略.

$t>0$，$z \mapsto \Theta(z,t)C_e(z)v_p$，$z \mapsto \Theta(-z,t)C_o(z)v_p$ の $z=z_0$ における留数をそれぞれ $\psi_e(z_0,t)$，$\psi_o(z_0,t)$ とする。このとき，ψ_e，ψ_o は G-K 上の実解析函数.

$\Phi_e(z_0\ x)$, $\Phi_s(z_0\ x)$ であって 函数等式

$$\Phi_\omega(z_0\ k_1 x k_2) = \tau_1(k_1)\,\Phi_\omega(z_0\ x)\,\tau_2(k_2)$$

$$k_1, k_2 \in K, \quad x \in G \setminus K \quad \omega = e, s$$

を満す様に一意に拡張出来る。

さらに $\mathfrak{Z}$ を G 上の両側不変微分作用素全体の作る環とすると $\Phi_\omega(z_0, x)$ は $\mathfrak{Z}$ に関する同時固有函数となることが分る。又，このとき，その固有値は z_0 及び p によって一意に決定される。

[ ] の結果の内で，$\mathfrak{Z}$ に関する固有値と $\lim_{t\to+\infty}\Phi_\omega(z_0\ a_t)$ の行動に関する対応の部分は $\Phi_\omega(z_0\ a_t) = \psi_\omega(z_0\ t)$ の $t=0$ に無関係に成立する。このことから，(7) を用いて，z_0 が命題3の除外点でなければ，$\psi_\omega(z_0\ t) = 0$ が結論出来る。

尚，詳しい証明は [3] に於いて発表する予定です。

参考文献

[1] H. Boerner : Darstellungen von Gruppen, Springer

[2] Harish-Chandra : Differential equations and semi-simple Lie groups (unpublished)

[3] M. Maruda : An analogue of Paley-Wiener theorem on the de Sitter group (to appear)

[4] R. Takahashi : Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés.

Soc. Math. France., 91 289-433 (1963)

[5] P.C. Trombi, V.S Varadarajan ; Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group ; the discrete spectrum.

Acta Math, 129, 237-280 (1972)

[6] G. Warner ; Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer.