数理解析研究所講究録
280巻 1976年 50-58

表現のもちあげについて

新谷卓郎

いまkを局所体，Kをkのガロワ拡大で$\mathfrak{g}$をKのkに関するガロワ群とする。さらにGをk上定義された線形代数群とし，G_k，G_KでそれぞれGのk-有理点，K有理点の全体のなす群とする。このとき$\mathfrak{g}$は自然にG_Kに自己同形として作用する。$\mathfrak{g}$の作用によって不変な点の全体はG_kにほかならない。局所コンパクト群G_k，G_Kの既約ユニタリ表現の同値類の集合を$\widehat{G}_k$，$\widehat{G}_K$とかけば，$\mathfrak{g}$は$\widehat{G}_K$に自然に作用する。実際$\rho \in \widehat{G}_K$，$\sigma \in \mathfrak{g}$にたいして$\rho^\sigma \in \widehat{G}_K$を$\rho^\sigma(g) = \rho(g^\sigma)$と定義すれば，$\rho \longmapsto \rho^\sigma$は$\mathfrak{g}$の$\widehat{G}_K$への作用である。以下$\mathfrak{g}$の作用で不変な$\widehat{G}_K$の元の全体を$\widehat{G}_K^{\mathfrak{g}}$とかく。以下次の問題を考える。

問題(L) 二つの集合 $\widehat{G_k}$ と $\widehat{G_K}^{\mathfrak{g}}$ とのあいだには、なにか自然な関係は存在しないか？

実際に $\widehat{G_k}$ と $\widehat{G_K}^{\mathfrak{g}}$ との間に自然な対応が存在するとき、$\pi \in \widehat{G_k}$ に対応する $\Pi \in \widehat{G_K}^{\mathfrak{g}}$ を、G_k の既約ユニタリ表現 π の、G_K の $\mathfrak{g}$-不変な既約ユニタリ表現 Π への「もちあげ」(lifting)とよぶことにしたい。

これだけではきわめてばくぜんとしている。以下いくつかの、$\widehat{G_k}$ と $\widehat{G_K}^{\mathfrak{g}}$ とのあいだに自然な関係の存在する例をのべる。

例 1. (i) k を標数 0 の局所体、K をその巡回拡大体とし、G を体の零ならざる元のなす乗法群とする。このとき $G_k = k^\times$, $G_K = K^\times$ で、$\widehat{G_k}$, $\widehat{G_K}$ はそれぞれ、$k^\times$, $K^\times$

の局所コンパクトアーベル群として の指標群と同一視される。いま $\chi\in\widehat{G}_k$ にたいして $\xi_\chi\in\widehat{G}_K$ を

$$\xi_\chi(x)=\chi(N_{K/k}(x))$$

と定義する。ここに $N_{K/k}$ は K から k へのノルムを意味する。明らかに $\xi_\chi(x^\sigma)=\xi_\chi(x)$ $(\forall\sigma\in\mathfrak{g}(K/k))$ であるから $\xi_\chi\in\widehat{G}_K^{\mathfrak{g}}$. 逆に勝手に $\xi\in\widehat{G}_K^{\mathfrak{g}}$ をとるとき，"ヒルベルト定理90"によって適当な $\chi\in\widehat{G}_k$ をとれば，$\xi=\chi\circ N_{K/k}$ が成立する。ただし χ は ξ によって一意的には定まらない。実際 $N_{K/k}(K^\times)$ は $k^\times$ の，index が $[K,k]$ に等しい，部分群であるから χ_0 を，$N_{K/k}(K^\times)$ を零化する $k^\times$ の指標とすれば，$\xi=(\chi\chi_0)\circ N_{K/k}$ である。この例においては，写像：$\chi\longmapsto\chi\circ N_{K/k}$ を $k^\times$ の指標 χ の $K^\times$ の $\mathfrak{g}$ 不変な指標への"もちあげ"とよぶことは自然であろう。

(ii) k, K は (i) と同様として、G を体の加法群とする。このとき $G_k = k$, $G_K = K$ で、$\hat{G}_k$, $\hat{G}_K$ はそれぞれ k, K の加法的指標群である。このとき、写像：$\chi \in \hat{G}_k \longmapsto \chi \circ tr_{K/k} \in \hat{G}_K^{\mathfrak{g}}$ は $\hat{G}_k$ より $\hat{G}_K^{\mathfrak{g}}$ への自然な1対1対応を与える，ここに $tr_{K/k}$ は、K から k への跡である。

例2．いま k を q 個の元からなる有限体とし K を k の n 次の拡大体とする。このとき $\mathfrak{g}$ は"フロベニウス置換"：$x \longmapsto x^q = x^\sigma$ によって生成される位数 n の巡回群となる。 $G = GL_n$, $G_k = GL_n(k)$, $G_K = GL_n(K)$ としよう。$R \in \hat{G}_K^{\mathfrak{g}}$ とすれば，R^σ は R と同値な既約表現であるから表現空間の非退化線型変換 I_σ で、$R^\sigma(x) = R(x^\sigma) = (I_\sigma)^{-1} R(x) I_\sigma$ $(\forall x \in G_K)$ なるものが存在する。線型変換 I_σ は定数倍を除い

て一意的に定まり、I_σ^m はスカラーである。以下 I_σ は、$I_\sigma^m = 1$ なる条件を満足するように正規化されているとする（I_σ はなお 1 の m 乗根倍の任意性をもつ）。いま $x \in G_K$ にたいして $N_{K/k}(x)$ を

$$N_{K/k}(x) = x^{\sigma^{m-1}} x^{\sigma^{m-2}} \cdots x^{\sigma} x$$

と定義する。一般に $N_{K/k}(x)$ は、G_k の元ではないが、G_k の元に G_K 内で共役である。以下 $N_{K/k}(x)$ で、$N_{K/k}(x)$ と G_K 内で共役な元を含む G_k の共役類をも意味することとする。このとき次の結果が成立する。

定理　任意の $R \in \widehat{G_K}$ にたいして、G_k の既約指標 χ_R が一意的に存在して、等式

$$\mathrm{trace}\, I_\sigma R(x) = \pm\zeta\, \chi_R(N_{K/k}(x)) \quad (\forall x \in G_K)$$

が成立する。（ここに ζ は 1 の m 乗根で、$\pm\zeta$ は I_σ のとり方にのみ

依存し、xには依存しない）さらに写像 $R \longmapsto \chi_R$ は集合 $\widehat{G_K}$ から G_k の既約指標の集合（すなわち $\widehat{G_k}$）への bijection を与える。

この例においても、$\pi \in \widehat{G_k}$ にたいしてその"もちあげ"を χ_R が π の指標と一致する $R \in \widehat{G_K}$ であると定義するのは自然であろう。K の k に関する拡大次数 m が n の倍数であるときは、G_k の"離散系列"に属する既約表現のもちあげがすべて G_K の"連続系列"に入ることは興味深い。くわしくは筆者の論文 "Two remarks on irreducible characters of finite linear groups, J. Math. Soc. Japan vol. 28 (1976) p.396 — 414 を参照して下さい。

例 3. $k = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$, $G = GL_2$ このとき、σ は複素共役の生成

する位数2の巡回群であり、$G_k = GL(2, \mathbb{R})$, $G_K = GL(2, \mathbb{C})$ である。$R \in \hat{G}_K^{\sigma}$ にたいして I_σ を前例と同様に定義する。次の補題が成立する。

Lemma $\forall f \in C_0^\infty(G_K)$ にたいして $\int_{G_K} f(x) I_\sigma R(x) dx$ なる（R の表現空間の）線形作用素は跡をもつ。そして G_K 上の局所可積分函数 $\mathrm{tr}\, I_\sigma R(x)$ が存在して等式

$$\mathrm{tr} \int_{G_K} f(x)\, I_\sigma\, R(x)\, dx = \int_{G_K} f(x) \{\mathrm{tr}\, I_\sigma R(x)\} dx$$

が成立する（dx は G_K の不変測度）。

定理 任意の $R \in \hat{G}_K$ にたいして $r \in \hat{G}_k$ が（一般には4とおり）存在して、等式

$$\mathrm{tr}\, I_\sigma R(x) = (\pm 1)\, \mathrm{tr}\, r(N_{K/k}(x)) \quad (\forall x \in G_K)$$

が成立する。I_σ を適当にとれば、

(± 1) はとりさってよい。

逆に任意の $\gamma \in \widehat{G}_k$ にたいして，上記定理の等式によって γ と結ばれた $R \in \widehat{G}_K^{\sigma}$ が唯一つ存在する。したがってこの場合にも“$\gamma \in \widehat{G}_k$ の“もちあげ”を自然に定義することができる。

例 4　k を標数 0 の非連結局所体とし（k の剰余類体の標数は 2 でないとする），K をその素数次の巡回拡大とし，$G = GL_2$ とする。この場合にも例 3 と同様の事実が成立する。

“表現のもちあげ”は，土井－長沼－斉藤（裕）諸氏による“保形型式のもちあげ”の理論を表現論的に解釈するときに役割を演じる。それについては「数学」第 28

巻春季号「記録」の中の筆者の記事を参照して下さい。

（三ソ.二）