数理解析研究所講究録
280巻 1976年 21-30

ポアソン積分と微分方程式

日本女大 峰村 勝弘

ここでは．vector bundle におけるポアソン積分について定義といくつかの性質を述べ，$SL(2,\mathbb{R})$ と $SL(2,\mathbb{C})$ における計算結果を述べる。

§1．記号

Gを．連結実半単純，中心有限なリー群，$\mathfrak{g}$をGのリー環 KをGの一つの極大コンパクト部分群，$\mathfrak{k}$をKのリー環，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$を$\mathfrak{g}$の一つのカルタン分解，$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{p}$における極大可換部分空間，$R$を$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$に関するルートの集合，$R_+$を（一つの順序を固定して）正のルートの集合とする。$R_+\ni\alpha$に対して，αに対応するルートベクトルの空間を$\mathfrak{g}_\alpha$と書く。

$$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}(\dim\mathfrak{g}_\alpha)\alpha,\quad \mathfrak{n}=\sum_{\alpha\in R_+}\mathfrak{g}_\alpha,\quad \bar{\mathfrak{n}}=\sum_{\alpha\in R_+}\mathfrak{g}_{-\alpha}$$

とおき，$\mathfrak{k}$，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{n}$，$\bar{\mathfrak{n}}$に対応するGの解析的部分群をそれぞれ $K,A,N,\bar{N}$ と記す。岩沢分解 $G=KAN$に

による $g\in G$ の分解を $g=k(g)e^{H(g)}n(g)$ と記す。$M=Z_K(A)$, $M'=N_K(A)$, $W=M'/M$, $P=MAN$ とおく。K の既約表現(の同値類)全体を $\hat{K}$ で表わす。

$(\tau,V)\in\hat{K}$ に対して τ の M への制限を τ_M と書く。$\tau\in\hat{K}$ と $\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$ に対して, τ に associate した G/K 上の vector bundle を E_τ, $P\ni man\longmapsto e^{(\lambda+\rho)H(a)}\tau_M(m)\in GL(V)$ に associate した G/P 上の vector bundle を F_{λ,τ_M}, τ_M に associate した K/M 上の vector bundle を F_{τ_M} と記す。

vector bundles E_τ, F_{λ,τ_M}, F_{τ_M} に値を取る hyperfunction の(global) section の全体をそれぞれ $\mathcal{B}_\tau(G/K)$, $\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P)$, $\mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)$ と書けば 自然な同一視で

$$\mathcal{B}_\tau(G/K)=\{f\in\mathcal{B}(G)\otimes V \mid f(gk)=\tau(k^{-1})f(g),\ g\in G,\ k\in K\}$$

$$\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P)=\{\varphi\in\mathcal{B}(G)\otimes V \mid \varphi(gman)=e^{-(\lambda+\rho)H(a)}\tau_M(m^{-1})\varphi(g)\quad g\in G,\ m\in M,\ a\in A,\ n\in N\}$$

$$\mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)=\{\varphi\in\mathcal{B}(K)\otimes V \mid \varphi(km)=\tau(m^{-1})\varphi(k),\ k\in K,\ m\in M\}$$

となる。制限により自然に $\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P)\cong\mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)$。

$G\ni g$ と $\mathcal{B}(G)\otimes V\ni f$ に対して

$$(\pi(g)f)(g_0)=f(g^{-1}g_0)\qquad(g_0\in G)$$

と定めれば, $\pi(g)$ は $\mathcal{B}_\tau(G/K)$, $\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P)$ を不変にする。$\pi(g)$ の $\mathcal{B}_\tau(G/K)$, $\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P)$ への制限をそれぞれ

$\pi_\tau(g)$, $\pi_{\lambda,\tau_M}(g)$ と書く。π_τ, π_{λ,τ_M} によりそれぞれ $\mathcal{B}_\tau(G/K)$, $\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P)$ は G-module となる。

$\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P) \cong \mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)$ により、$\mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)$ を G-module と考えよう。$g \in G$ の作用を同じく $\pi_{\lambda,\tau_M}(g)$ と書く。このとき $\varphi \in \mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)$ に対して

$$(\pi_{\lambda,\tau_M}(g)\varphi)(k) = e^{-\lambda(H(g^{-1}k))}\varphi(K(g^{-1}k))$$

となる。

§2. ポアソン積分 (詳しくは [2], [3] 参照)

<u>Def.</u> $\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P) \ni \varphi$ に対して φ のポアソン積分 $\mathcal{P}_{\lambda,\tau}(\varphi) \in \mathcal{B}_\tau(G/K)$ を

$$\mathcal{P}_{\lambda,\tau}(\varphi)(g) = \int_K \tau(k)\varphi(gk)\,dk$$

で定める。但し、dk は K 上の (normalized) Haar measure

明らかに $\mathcal{P}_{\lambda,\tau}$ は $\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P)$ から $\mathcal{B}_\tau(G/K)$ への G-hom. である。

$\mathcal{B}_{\lambda,\tau_M}(G/P) \cong \mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)$ により $\mathcal{P}_{\lambda,\tau}$ を $\mathcal{B}_{\tau_M}(K/M)$ から $\mathcal{B}_\tau(G/K)$ への map と考えると、

<u>Lem.</u> $\mathcal{B}_{\tau_M}(K/M) \ni \varphi$ に対して、φ のポアソン積分 $\mathcal{P}_{\lambda,\tau}(\varphi) \in \mathcal{B}_\tau(G/K)$ は

$$P_{\lambda,\tau}(\varphi)(g)=\int_K e^{(\lambda-\rho)(H(g^{-1}k))}\tau(K(g^{-1}k))\varphi(k)dk$$

で与えられる。」

$P_{\lambda,\tau}(g,k)=e^{(\lambda-\rho)(H(g^{-1}k))}\tau(K(g^{-1}k))$ とおき，$P_{\lambda,\tau}$ を（一般化された）ポアソン核と呼ぶ。

§3. ポアソン核の満たす微分方程式

$(\tau_1,V_1),(\tau_2,V_2)\in\hat{K}$ とし，vector bundle E_{τ_1} から vector bundle E_{τ_2} への G-invariant な微分作用素の全体を $\mathrm{Diff.}(E_{\tau_1},E_{\tau_2})$ と書く。複素リー環 $\mathfrak{l}$ に対してその展開環を $U(\mathfrak{l})$ と書く。$\mathcal{G}=U(\mathfrak{g}_c)$, $\mathcal{K}=U(\mathfrak{k}_c)$, $\mathcal{A}=U(\mathfrak{a}_c)$, $\mathcal{G}^{\mathfrak{k}}=\{u\in\mathcal{G}\mid[u,\mathfrak{k}]=0\}$ とおく。$(\tau,V)\in\hat{K}$ に対しその反傾表現を (τ^*,V^*) と書く。又 τ の微分表現を $d\tau$ で表わし $\mathcal{K}$ の表現に拡張しておく。

$(\tau_1,V_1),(\tau_2,V_2)\in\hat{K}$ に対して

$$(V_1^*\otimes V_2\otimes\mathcal{G})^K$$
$$=\{z\in V_1^*\otimes V_2\otimes\mathcal{G}\mid\tau_1^*(k)\otimes\tau_2(k)\otimes\mathrm{Ad}(k)z=z,\ {}^\forall k\in K\}$$

とおく。このとき自然な写像 ν_{τ_1,τ_2}:

$$\nu_{\tau_1,\tau_2}:(V_1^*\otimes V_2\otimes\mathcal{G})^K\longrightarrow\mathrm{Diff.}(E_{\tau_1},E_{\tau_2})$$

は、Kが compact であることにより onto となる。（[4] 第5章第4節参照） とくに $(\tau_1, V_1) = (\tau_2, V_2) = (\tau, V)$ のとき $\mathfrak{g}^K \ni u \longmapsto id \otimes u \in (V^* \otimes V \otimes \mathfrak{g})^K$ という写像により

$$\mathfrak{g}^K \hookrightarrow (V^* \otimes V \otimes \mathfrak{g})^K \longrightarrow Diff(E_\tau)$$

さて，$u \in \mathfrak{g}$ に対して $u - u' \in \mathfrak{n}_c\mathfrak{g}$ となる $u' \in \mathfrak{a}\mathfrak{k}$ が unique に定まるが，自然な同型 $\mathfrak{a}\mathfrak{k} \cong \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}$ により $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}$ の元とみたとき u' を $\varpi(u)$ と書く。$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}$ は自然に algebra となるが，ϖ を $\mathfrak{g}^K$ に制限したとき $\mathfrak{g}^K$ から $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}^m$ （$\mathfrak{k}^m = \{u \in \mathfrak{k} \mid [u, m] = 0$, m は M のリー環）への anti-alg. iso である。（[1] Prop. 9.2.3, Prop. 9.2.8）。

$G \ni g \longmapsto g^{-1} \in G$ から導びかれる $\mathfrak{g}$ の anti-auto. を $*$ で表わす。

<u>Lem.</u> $\pi = (* \otimes *) \circ \varpi : \mathfrak{g}^K \xrightarrow{\varpi} \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}^m \xrightarrow{* \otimes *} \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}^m$ とおけば，π は $\mathfrak{g}^K$ から $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}^m$ への alg. iso である。

$\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$, $(\tau, V) \in \hat{K}$ に対して $\chi_{\lambda, d\tau} \in Hom(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{k}, End(V))$ を，$\chi_{\lambda, d\tau}(H \otimes Y) = \lambda(H)\, d\tau(Y)$ $(H \in \mathfrak{a}_c, Y \in \mathfrak{k}_c)$ で定める。

<u>Lem.</u> $f(g) = e^{\lambda(H(g^{-1}))}\tau(K(g^{-1}))$ とおくと $f \in \mathcal{B}_\tau(G/K)$ で $^\forall u \in \mathfrak{g}^K$ に対して $uf = f \circ \chi_{\lambda, d\tau}(\pi(u))$ を満たす。

Cor $\mathcal{G}^k \ni u$ に付して

$$u P_{\lambda,\tau}(g,k) = P_{\lambda,\tau}(g,k) \circ \chi_{\lambda-\rho, d\tau}(\pi(u))$$

§4. $SL(2,\mathbb{R})$

$G = KAN$

$$K = SO(2) = \left\{ k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \quad \bar{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

$R_+ = \{\alpha\}$ 但し $\alpha : H = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \longmapsto 2$

よって $\rho = \frac{1}{2}\alpha : H \longmapsto 1$

$\hat{K} = \{ \tau_m \mid \tau_m(k_\theta) = e^{im\theta} \}$

$\mathfrak{a}_c^*$ を $\mathbb{C} \ni s \longmapsto s\rho \in \mathfrak{a}_c^*$ によって $\mathbb{C}$ と同一視する。τ_m に associate した vector (実は line) bundle を E_m と書く。以下同様にして $P_{s,m}$, F_m, $F_{s,m}$ 等と書く。

$\bar{N}A \cong G/K \cong H_+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$

$\bar{n}a \longleftrightarrow gK \longleftrightarrow g(i)$ 　但し $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ 　$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

により $\mathcal{B}_m(G/K)$ を $\mathcal{B}(H_+)$ と同一視する。

$X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。$\underset{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}{\overset{\Omega}{\cap}}$ を Casimir element とすると,

$$\Omega = \frac{1}{4}\left(X_\alpha X_{-\alpha} + X_{-\alpha} X_\alpha + \frac{1}{2} H^2\right)。$$

$Y = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ とおけば $k_\theta = e^{\theta Y}$ だから $d\tau_m(Y) = im$.

さて $\omega = 2\Omega$ とおき $\nu(\omega) \in \mathrm{Diff}(E_m)$ を調べる。

$$\omega = \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}H + X_{-\alpha}^2 - X_{-\alpha}Y$$

より

$$\nu(\omega) = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + imy\frac{\partial}{\partial x} \qquad x+iy \in H_+$$

を得る。

次に $\chi_{s, d\tau_m}(\pi(\omega))$ を調べる。容易に

$$\omega = \frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H + X_\alpha^2 + X_\alpha Y \equiv \frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H \mod \mathfrak{n}_c\mathfrak{g}$$

を得る。従って $\pi(\omega) = \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}H$ であるから

$$\chi_{s, d\tau_m}(\pi(\omega)) = \frac{1}{4}(s-1)^2 + \frac{1}{2}(s-1) = \frac{s+1}{2}\,\frac{s-1}{2}$$

従ってポアソン核 $P_{s,m}$ は微分方程式

$$\left\{y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + imy\frac{\partial}{\partial x} - \frac{s+1}{2}\,\frac{s-1}{2}\right\}P_{s,m} = 0$$

を満たす。

ポアソン核の explicit な形は次の通り。$\bar{N} \ni \bar{n}$ に対して $\kappa(\bar{n})$ を対応させて, $P_{s,m}(g, \bar{n})$ と書く。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \in \bar{N}A \quad を \quad z = x+iy$$

$\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を ξ と書くと

$$P_{s,m}(z,\xi) = i^m \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^{\frac{-s+1}{2}} (z-\xi)^{\frac{s-1}{2}+\frac{m}{2}} (\bar{z}-\xi)^{\frac{s-1}{2}-\frac{m}{2}}$$

<u>Rem</u> τ_m の表現空間を $V_m\ (\simeq \mathbb{C})$ と書く。このとき

$$D_+ = iX_{-\alpha} + \frac{1}{2}H - \frac{i}{2}Y \in (V_m^* \otimes V_{m+2} \otimes \mathfrak{g})^K$$

$$D_- = iX_{-\alpha} - \frac{1}{2}H - \frac{i}{2}Y \in (V_m^* \otimes V_{m-2} \otimes \mathfrak{g})^K$$

$H_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ の座標で書くと、

$$V_{m,m+2}(D_+) = (z-\bar{z})D_{\bar{z}} - \frac{m}{2} \qquad D_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$V_{m,m-2}(D_-) = (z-\bar{z})D_z - \frac{m}{2} \qquad D_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

容易に

$$\left\{(z-\bar{z})D_{\bar{z}} - \frac{m}{2}\right\} P_{s,m} = \left(-\frac{s-1}{2} + \frac{m}{2}\right) P_{s,m+2}$$

$$\left\{(z-\bar{z})D_z - \frac{m}{2}\right\} P_{s,m} = \left(\frac{s-1}{2} + \frac{m}{2}\right) P_{s,m-2}$$

がわかる。従って このことからも

$$\left\{y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + imy\frac{\partial}{\partial x} - \frac{s+1}{2}\frac{s-1}{2}\right\} P_{s,m} = 0$$

が導かれる。

§5. $SL(2,\mathbb{C})$

$$G = SU(2) \times A \times N = \bar{N} \times A \times SU(2) \qquad K = SU(2)$$

但し.

$$A=\left\{\begin{pmatrix} e^{-t} & \\ & e^{t}\end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\},\quad N=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, w\in\mathbb{C}\right\}$$

$$\bar{N}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, z\in\mathbb{C}\right\}$$

$\tau\in\hat{K}$ を $\tau(k)=k$ $k\in K$ で定める。G/K の座標を

$$g=\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{t}}\end{pmatrix} \longleftrightarrow gK\in G/K$$

で入れる。このとき

$$P_{s,\tau}(g,e)=\left(\frac{t}{z\bar{z}+t^2}\right)^{-s+1}\begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{z\bar{z}+t^2}} & \frac{-z}{\sqrt{z\bar{z}+t^2}} \\ \frac{\bar{z}}{\sqrt{z\bar{z}+t^2}} & \frac{t}{\sqrt{z\bar{z}+t^2}}\end{pmatrix}$$

Ω を Casimir element とする。$\omega=4\Omega$ とおく。

$$\nu(\omega)=t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+4t^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}-t\frac{\partial}{\partial t}+\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2t\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \\ -2t\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

一方 $\chi_{s,d\tau}(\pi(\omega))=(s+1)(s-1)+\frac{1}{4}$

従って ポアソン核は次の微分方程式をみたす.

$$\left[t^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}\right)-t\frac{\partial}{\partial t}+\begin{pmatrix} 0 & 2t\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \\ -2t\frac{\partial}{\partial z} & 0\end{pmatrix}-(s+1)(s-1)\right]P_{s,\tau}=0$$

<u>Rem</u> 上の τ の場合に $\chi_{\lambda,d\tau}(\pi(\omega))$ が scalar operator になることが効いている。一般的に $u\in\mathcal{G}^K$ に対して $\chi_{\lambda,d\tau}(\pi(u))$ が semisimple になる条件等を調べることは重要であろう。

References

[1] Diximier, J., Algèbres Enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974.

[2] Kashiwara, M., A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, Eigenfunctions of Invariant Differential Operators on a Symmetric Space, to appear.

[3] Okamoto, K., Harmonic analysis on homogeneous vector bundles, Lecture notes in Math., Springer-Verlag, 266 (1972), 387-436.

[4] Wallach, N. R., Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces, Dekker, 1973.