数理解析研究所講究録
280巻 1976年 16-20

二、三の問題の提示

東大理 数学　　平井 武

簡単に述べられる二、三の問題について話す。

<u>問題1.</u> $SU(n)$ の既約表現をとり、それを $SO(n)$ に制限したときの分解を与えよ。また $SU(2n)$ の既約表現を $Sp(2n)$ に制限したときの分岐律はどうか。

この問題に関して完全な結果が得られているのは私の知る限りでは、$SU(3)$ と $SO(3)$ の場合だけである。枝松氏の結果[1]に依れば $SO(3)$ の既約表現の表れる重複度は、この場合でさえ簡単ではない。証明に用いられた方法は、Zhelobenko [2] に於ける既約表現の実現をとり、$SL(n, \mathbb{C})$ と $SO(n, \mathbb{C})$ の関係におきかえて、$SL(n, \mathbb{C})$ の表現空間の中にある $SO(n, \mathbb{C})$ の最高ウェイトベクトルの数を求めたのである。一般の n について望み得る結果は多分次

のようなものではないか。Kostantの重複度公式又は
Blattnerの K-重複度の公式 (cf.[3]) の如く、$SU(n)$の
最高ウェイト λ と $SO(n)$のそれ μ に対して重複の公式
$w(\lambda, \mu)$ を予想して、それを証明すること。しかし乍ら
今の段階では予想もできない程情報不足と思われる。」

問題2. $SU(n)$, $SO(n)$ 又は $Sp(n)$ の、最高ウェイト λ
をもつ既約表現を考える。その表現にウェイト μ が表れる
重複度は上述のKostantの公式[4]で与えられているが、
それは負項も含んだ公式なので、いつ $\neq 0$ となるのか
簡単には分らない。そこで $\neq 0$ となる μ の全体を
$P(\lambda)$ と書いたとき、$P(\lambda)$ を λ を使って簡単に表わせ
ないか？ ということを問題とする。すなわち重複度
の具体的な値でなく、それが 0 か 0 でないかだけ
に注目する訳である。

この問題も簡単に手の着くのは trivial な場合で
ある。$SO(3)$ はよく分っている。$SO(4)$ は局所的には
$SO(3) \times SO(3)$ と同型になるので計算できる。結果として
$P(\lambda)$ は二次元の格子点で四つの頂点できまる平
行四辺形の内部にあるもの全体、ということになる。最も

単純な質問：SO(4)の時の如く $P(\lambda)$ は格子点の集合として"convex"なのであろうか？　これは既知なのか？

さて、$\mathfrak{g}$ を複素半単純リー環, $\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分環, $\mathfrak{h}^*$ をその双対空間, W を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の Weyl 群とする。Gel'fand 達の Verma module ($\mathfrak{g}$ の) の研究[5] また、Wallach の discrete series の表現の研究[6] ($\mathfrak{g}$ の実形 $\mathfrak{g}_0$ に対応する群の離散系列表現), 等に於いて 有限次元 (前者では), 又は無限次元 (後者では) の $\mathfrak{g}$-module と $\mathfrak{g}$ の既約 (有限次元) 表現とのテンソル積を考えるという trick が実に有効に使われている。その手法を使った論文がもう一つある[7]、ここでは 実半単純リー群 G の 既約指標の一次結合となる G 上の不変固有超函数を特徴付けようというのである。この問題が意味のあることは[8]で分っており、特殊な群については答は分っていた。ところが[7]に於ける証明は一般的ではあるが、次の問題が見逃されている。

問題3. $\mathfrak{h}^*$ の実部分空間でルート全体から張られるものを $\mathfrak{h}^*_R$ とし $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}^*_R + \sqrt{-1}\,\mathfrak{h}^*_R$ と表示する. C を $\mathfrak{h}^*_R$ の

閉じた正Weyl領域とする。$\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ は $\mathrm{Re}\Lambda \in C$ となっているとする。λ を dominant integral form とし λ を最高ウェイトとする $\mathfrak{g}$ の既約表現の中のウェイト全体を $P(\lambda)$ とかく。$W_\Lambda = \{w \in W ; w\Lambda = \Lambda\}$.

μ を正則とするとき次は正しいか？

$$\Lambda + P(\lambda) \cap W(\Lambda+\lambda) = W_\Lambda(\Lambda+\lambda)$$
$$= \Lambda + W_\Lambda \lambda$$

これが正しければ $w \in W$, $wP(\lambda) = P(\lambda)$ ゆえ

$$w\Lambda + P(\lambda) \cap W(\Lambda+\lambda) = w(\Lambda + W_\Lambda \lambda)$$
$$= wW_\Lambda(\Lambda+\lambda)$$

また $\Lambda+\lambda$ は正則となるので上の両辺は丁度 $|W_\Lambda|$ 個の元を含んでいる。

最後に一言。上の３つの問題は相互の関連を意識して並べたものではありません。関係はある筈ですが。いずれにしろ日頃無限次元を相手にしているので、有限次元の問題で、しかも準備なく簡単に述べられるものがなつかしい。これは問題の難易とは別物。

[1] T. Edamatsu: Spectral components in analytic irreducible representations of SL(3, C) restricted to the subgroup SO(3, C), Mathematica Japonicae , 14(1969), 111-115.

[2] D. P. Zhelobenko: The classical groups. Spectral analysis of their finite dimensional representations, Uspehi Mat. Nauk,17(1962), 27-76.

[3] R. Hotta and R. Parthasarathy: Multiplicity formulae for discrete series, Inven. Math., 26(1974), 133-178.

[4] B. Kostant: A formula for the multiplicity of a weight, Trans. Amer. Math. Soc., 93(1959), 53-73.

[5] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand: Structure of representations generated by the highest weight vectors, Funct. anal. and its appl., 5(1971), 1-9.

[6] N. R. Wallach: On the Enright-Varadarajan modules: A construction of the discrete series, preprint.

[7] A. I. Fomin and N. N. Shapovalov: A property of the characters of irreducible representations of real semisimple Lie groups, Funct. anal. and its appl., 8(1974), 87-88.

[8] T. Hirai: Some remarks on invariant eigendistributions on semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 12(1972), 393-411.