数理解析研究所講究録
280巻 1976年 1-15

De Sitter 群上の Fourier 解析と跡公式

佐賀大 理工　牟田洋一

§0、序

Selberg の trace formula は自然に半単純 Lie 群上のある K-type に従う可積分急減少 C^∞ 関数の Fourier 変換の研究に導くが，これはそれ自体としても極めて興味深い問題である.

本稿においては De Sitter 群に対してある K-type に従う L^p $(0<p\leqq 2)$-型急減少 C^∞ 関数の Fourier 変換を実行し，保型形式論への一つの応用を試みる.

§1. 準備

$\mathbb{H}$ を4元数体，$\mathcal{U}=\{u\in\mathbb{H}:\ |u|=1\}$ とし

$$G=\left\{g\in GL(2,\mathbb{H}):\ g^*Jg=J\right\}$$

とおく. ここに $J=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. G は De Sitter 群の universal covering group の一実現である. 今，G の 3 つの subgroups

K, A, N を

$$K=\left\{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v\end{pmatrix} : u, v \in \mathfrak{U}\right\},$$

$$A=\left\{a_t=\begin{pmatrix} ch\frac{t}{2} & sh\frac{t}{2} \\ sh\frac{t}{2} & ch\frac{t}{2}\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\},$$

$$N=\left\{\begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x\end{pmatrix} : x \in i\mathbb{R}+j\mathbb{R}+k\mathbb{R}\right\}$$

によって定めると，$G=KAN$ は G の岩沢分解を与える．これに伴なり $g \in G$ の分解を

$$g=\kappa(g)\, a_{t(g)}\, x_g \qquad \kappa(g) \in K,\ t(g) \in \mathbb{R},\ x_g \in N$$

と書く．極大 compact 群 K は 2 つの部分群

$$K_1=\left\{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} : u \in \mathfrak{U}\right\} \text{ と } K_2=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v\end{pmatrix} : v \in \mathfrak{U}\right\}$$

の直積であるが，$\mathfrak{U} \cong SU(2)$ だから，K の既約 unitary 表現は非負半整数の pair (n, n') で parametrize される。これを $\rho^{n,n'}$ とし，$\rho^{n,n'}$ の正規化された指標を $\chi^{n,n'}$ と書く．

G の元 g はまた

$$g=k_1 k_2 a_t k_2' \qquad k_1 \in K_1,\ k_2, k_2' \in K_2,\ t \geqq 0$$

の形に書けるが，$g \notin K$ のとき この表わし方は一意である．

§2. 関数 $\phi_{n,0}(g, s)$

半整数 $n \geqq 0$ を任意に fix しておく．$\forall s \in \mathbf{C}$ に対し関数 $\phi_{n,0}(g, s)$ を

$$\phi_{n,0}(g,s)=\int_K \frac{\chi^{n,0}(\kappa(k^{-1}gk))}{\chi^{n,0}(e)}e^{-st(gk)}dk$$

によって定義する. $\phi_{n,0}(g,s)$ は class $\chi^{n,0}$ の球関数で,
$g=k_1k_2a_tk_2'$ に対し

$$\phi_{n,0}(g,s)=\phi_{n,0}(a_t,s)\frac{\chi^{n,0}(k_1)}{\chi^{n,0}(e)}$$

であり, その explicit form は超幾何関数を用いて

$$\phi_{n,0}(a_t,s)=\left(1-th^2\frac{t}{2}\right)^s F\left(s+n,\ s-n-1,\ 2\ ;\ th^2\frac{t}{2}\right)$$

と書かれる. 我々の analysis においては, G の無限遠における $\phi_{n,0}(g,s)$ の behaviour が問題になる. そのため清水氏 [7] によって得られた結果が必要である.

変数変換 $y=sh^2\frac{t}{2}$ により $\phi_{n,0}(y,s)\equiv\phi_{n,0}(a_t,s)$ は

$$\phi_{n,0}(y,s)=\left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{-s}\frac{\Gamma(3-2s)}{\Gamma(n+3-s)\Gamma(2-s-n)}F\left(s+n,\ s+n-1,\ 2s-2\ ;\ -\frac{1}{y}\right)$$

$$+\left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{s-3}\frac{\Gamma(2s-3)}{\Gamma(s+n)\Gamma(s-n-1)}F\left(n+3-s,\ n+2-s,\ 4-2s\ ;\ -\frac{1}{y}\right)$$

となる. 右辺第1項を $\varphi_n(y,s)$ と書くと, $y>1$ のとき

$$\phi_{n,0}(y,s)=\varphi_{n,0}(y,s)+\varphi_{n,0}(y,3-s)$$

が成立つ. $\varphi_{n,0}(y,s)$ と Plancherel density との積を $\Phi_n(y,s)$ と書くと

$$\Phi_n(y,s)=\left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{-s}\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2\frac{\Gamma(3-2s)}{\Gamma(n+2-s)\Gamma(1-s-n)}$$

$$\times \left(s-\frac{3}{2}\right)\tan\pi\left(s+n-\frac{3}{2}\right)F\left(s+n,\ s+n-1,\ 2s-2\ ;\ -\frac{1}{y}\right),$$

これは $Re(s) \geq \frac{3}{2}-n$ で meromorphic，その singularities は

$$s=-n+2,\ -n+3,\ \cdots,\ n+1\quad \left(s \neq \frac{3}{2}\right)$$

にある simple poles だけである．

今

$$g_n(s) = 2\pi(-1)^{2n+1}(s+n-2)(s+n-3)\cdots(s-n-1),$$

$$\alpha_k^n(s) = \binom{2n}{k}(s-n-2)_{2n-k}(s+n)_k,$$

$$\Psi_n(y,s) = \sum_{k=0}^{2n}\alpha_k^n(s)\int_0^1 t^{s+n-2}(1-t)^{s+n-2}\left(1+\frac{t}{y}\right)^{-(s+n+k)}dt$$

および

$$\mathcal{X}_n(y,s) = \frac{(s+n-1)\left(\frac{3}{2}-s\right)}{g_n(s)}\Psi_n(y,s)$$

と置く．このとき $\Phi_n(y,s)$ は

$$\Phi_n(y,s) = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2\left(\frac{1+y}{y}\right)^n y^{-s}\,\mathcal{X}_n(y,s)$$

と書かれる．

§3. $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ とその Fourier 変換

p を $0<p\leqq 2$ なる定数とせよ．σ，Ξ を G 上のいつもの K-両側不変な関数，Ω を G の Casimir 作用素とする．G 上

の C^∞ 関数で

$$f \circ \chi^{n,0} = f, \quad \int_K f(kgk^{-1})\,dk = f(g)$$

および

$$\mu_{r,l}^{(p)}(f) \equiv \sup_{g\in G} (1+\sigma(g))^r \Xi(g)^{-\frac{2}{p}} |\Omega^l f(g)| < +\infty \text{ for all } r, l = 0, 1, 2, \cdots$$

をみたすものの全体を $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ で表わし，seminorm 系 $\mu_{r,l}^{(p)}$ による位相をいれる．convolution により $\mathcal{C}_{r,l}^{(p)}(G)$ は可換な Fréchet 代数となる．また f が $\mathcal{C}_{n,0}^{(p)}(G)$ の関数なるとき積分

$$\hat{f}(s) = \int_G f(g)\phi_{n,0}(g, s)\,dg$$

は集合 $\mathcal{F}^{(p)} \equiv \{s \in \mathbb{C} : |Re(s) - \frac{3}{2}| \leq \frac{3}{2}(\frac{2}{p}-1)\} \cup \{g \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} : n-g \in \mathbb{Z}\}$ において絶対一様に収束する．この $\hat{f}$ を f の Fourier 変換と呼ぶ．

$\mathcal{F}^{(p)}$ 上の連続関数 $F(s)$ で，$int\,\mathcal{F}^{(p)}$ において正則で

$$F(s) = F(3-s), \quad F(g) = 0 \text{ if } g > n+1,\ n-g \in \mathbb{Z},$$

$$\zeta_{m,l}^{(p)}(F) \equiv \sup_{s,\,g} \left\{ (1+|s|^2)^m \left|\frac{d^l F}{ds^l}(s)\right|,\ |F(g)| \right\} < +\infty$$

$$\text{for all } m, l = 0, 1, 2, \cdots\cdots.$$

を満すもの全体を $\mathfrak{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^{(p)})$ と書く．ただし $p=2$ のときは直線 $Re(s) = \frac{3}{2}$ 上の C^∞-関数と考えるのである．上の seminorm 系で $\mathfrak{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^{(p)})$ は可換 Fréchet 代数となる．このとき次の定理が成り立つ．

<u>定理 1.</u> 変換 $f \to \hat{f}$ は位相代数 $\mathcal{C}^{(p)}_{n,0}(G)$ と $\mathfrak{Z}_{n,0}(\mathfrak{F}^p)$ の間の位相同型を与える。

$q > n+1$ のとき $\phi_{n,0}(g, q)$ が 2 乗可積分なること，および

$$\int_G \left| f(g) \frac{\partial^m}{\partial s^m} \phi_{n,0}(g, s) \right| dg$$

を計算することにより $f \to \hat{f}$ の連続性は比較的容易に得られる。逆を云うためには，任意の $F \in \mathfrak{Z}_{n,0}(\mathfrak{F}^p)$ に対し

$$f(g) = 2\int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} F(s)\,\Phi_n(g, s)\,ds + \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \sum_{\substack{1 \le q \le n \\ n-q \in \mathbb{Z}}} (2q-1)(n+q)(n-q+1)F(q+1)\,\phi_{n,0}(g, q+1)$$

が $\mathcal{C}^{(p)}_{n,0}(G)$ に属し，$F \to f$ が $\mathfrak{Z}_{n,0}(\mathfrak{F}^p)$ から $\mathcal{C}^{(p)}_{n,0}(G)$ への連続写像なることを示せばよい。

F は $\mathfrak{Z}_{n,0}(\mathfrak{F}^p)$ に属するから，関数 $F(s)\,\Phi_n(g, s)$ は $\mathrm{int}\,\mathfrak{F}^p$ で meromorphic，かつその singularities はすべて simple poles で，それらは高々

$$s = -n+2,\ -n+3,\ \cdots,\ n+1 \quad \left(s \neq \frac{3}{2}\right)$$

にある。簡単のため $\frac{3}{p} \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ としよう。F の急減少性と留数定理によって，上の積分は

$$f(g) = 2\int_{3/p-i\infty}^{3/p+i\infty} F(s)\,\Phi_n(g, s)\,ds + \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \sum_{\frac{3}{p}-1 < q \le n} (2q-1)(n+q)(n-q+1)F(q+1)\,\phi_{n,0}(g, q+1)$$

に等しい。この等式の右辺第 1 項を $f^{(0)}$，第 2 項を $f^{(1)}$ と書く。

ところで

$$\phi_{n,0}(y,\,q+1) = (1+y)^{-(q+1)}\left\{1+\frac{(q+n+1)(q-n)}{2!}\frac{1+y}{y}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n-q-1}\frac{(q+n+1)_{n-q}(n-q)!}{(n-q+1)!}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{n-q-1}\right\}$$

であるから，$q+1>\frac{3}{p}$ のとき

$$\sup_{y\geq\varepsilon_0>1} y^{\frac{3}{p}}(\log y)^r\,|\phi_{n,0}(y,\,q+1)|<+\infty \quad (r=0,1,2,\cdots)$$

が成立つ．よって，$f^{(1)}\in\mathcal{C}^{(p)}_{n,0}(G)$ かつ $F\to f^{(1)}$ は連続である．$f^{(0)}\in\mathcal{C}^{(p)}_{n,0}(G)$ と $F\to f^{(0)}$ の連続性は次の命題から得られる：

<u>命題 $T_{\ell q}$</u> ($\ell, q\geq 0$, integers) 定数 $B_{\ell q}>0$ と $k\in\mathbb{N}$ を適当に選んで，すべての $F\in\mathfrak{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^p)$ に対し

$$\sup_{y\geq\varepsilon_0>1}\left|y^{\frac{3}{p}}(\log y)^\ell\int_{\frac{3}{p}-i\infty}^{\frac{3}{p}+i\infty}F(s)\,y^{-s}\frac{\partial^q}{\partial s^q}\mathfrak{X}_n(y,\,s)\,ds\right|\leq B_{\ell q}\cdot\zeta^{(p)}_{\ell k}(F)$$

が成立つようにできる．

以上より，$f=f^{(0)}+f^{(1)}\in\mathcal{C}^{(p)}_{n,0}(G)$ であり，$F\to f$ が $\mathfrak{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^p)$ から $\mathcal{C}^{(p)}_{n,0}(G)$ への連続写像なることがわかった．

$\frac{3}{p}\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のときも少し手を加えればよい．

§4. Gangolli-Warner の定理の拡張

Γ を G の discrete subgroup で，$\Gamma\backslash G$ が compact なるものとし，U を $L^2(\Gamma\backslash G)$ における G の正則表現とせよ．このとき

U は重複度有限の既約表現の可算和

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus \pi_j$$

に分解する．我々は，右辺に現われる既約成分のうち $\rho^{n,0}$ を含むもの全体の様相を調べたい．これは Gangolli [3] が提唱した問題の special case である．

定義 (1)．G 上の非負連続関数 f は，すべての $g \in G$ に対し

$$f(g) \leqq C \cdot \int_{gV} f(h)\, dh$$

が成立つような定数 $C > 0$ と G の compact e-近傍 V が存在するとき regular growth と云われる．

(2)．G 上の連続関数 f は，級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(y^{-1}\gamma x)$$

が $G \times G$ 上 compact 一様収束し，$U(f)$ が $L^2(\Gamma \backslash G)$ 上の trace class の作用素なるとき admissible であると呼ばれる．

§3 で得た定理 1 を用いれば，Gangolli-Warner [4] と同様の方法で次の定理を証明することができる．

<u>定理 2.</u> $\mathcal{C}^{(1)}_{n,0}(G)$ の元はすべて admissible である．

<u>定理 3.</u> $f \to \mathrm{trace}\, U(f)$ は $\mathcal{C}^{(1)}_{n,0}(G)$ 上の generalized function である．

§5. Vector bundle $\mathcal{F}_{n,0}$ 上の熱方程式

以後Γは単位元以外に elliptic element をもたないと仮定しよう。このとき $\Gamma\backslash G/K$ は compact C^∞-manifold である。$\rho^{n,0}$ の表現空間を $V_{n,0}$ とする。$\Gamma\backslash G$ に K の表現 $k \to \rho^{n,0}(k)$ を associate して得られる $\Gamma\backslash G/K$ 上の vector bundle $(\Gamma\backslash G)\times_K V_{n,0}$ を $\mathcal{F}_{n,0}$ と書こう。$C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$ 上の laplacian を

$$\Delta : C^\infty(\mathcal{F}_{n,0}) \to C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$$

とすれば，$\varphi \in C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$ に対して

(A) $$\Delta\varphi = \Omega\varphi + 2n(n+1)\varphi$$

が成立つ（φをG上の$V_{n,0}$-値関数とみなす）。$\Gamma\backslash G/K$ は compact であるから，Δは重複度有限の discrete spectra を有す。相異なる固有値を

$$0 \leq r_0 < r_1 < r_2 < \cdots\cdots \uparrow +\infty ,$$

対応する重複度を

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ \cdots\cdots$$

としておく。

正則表現Uに含まれる既約成分のうち $\rho^{n,0}$ に dual な K の表現を含むものの一つをπとすれば，$\pi(\Omega)$ は scalar であるが，松島 [5] により，この値は $r_j - 2n(n+1)$ $(j=0,1,2,\cdots)$ のいずれかに等しい。更にこのようなπの集合を Π_j と書くことにすると

$$n_j = \sum_{\pi\in\Pi_j}[U:\pi] \qquad j=0,1,2,\cdots$$

である．

前§で述べた我々の問題を《区間 $(0,+\infty)$ 上の関数

$$N(r) \coloneqq \sum_{r_j<r} n_j r_j$$

の $r\to+\infty$ における asymptotic behaviour を求めること》と解する．即ち，$\rho^{n,0}$ に dual な表現を含む既約成分のなす集合の様相を Casimir 作用素ではかろうというわけである．

$N(r)$ の Laplace 変換を

$$\mathcal{L}(\alpha) \coloneqq \int_0^\infty e^{-\alpha r}\, dN(r)$$

とおく．$\mathcal{L}(\alpha)$ の behaviour を調べる．そのため $\mathcal{F}_{n,0}$ 上の heat equation

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial u}{\partial\lambda} + \Delta u = 0$$

の elementary solution を構成する．そのため，(A) に鑑み，$\mathcal{C}^{(1)}_{n,0}(G)$ の中に方程式

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial g_\lambda}{\partial\lambda} + \Omega g_\lambda + 2n(n+1)\, g_\lambda = 0 \qquad (\lambda>0)$$

をみたす関数 g_λ をもとめたい．(C) の両辺を Fourier 変換すれば

$$\text{(C}'\text{)} \qquad \frac{d\hat{g}_\lambda(s)}{d\lambda} + \big(s(3-s)+n(n+1)\big)\,\hat{g}_\lambda(s) = 0 .$$

今，$\mathcal{F}^1$ 上の関数 $H_\lambda(s)$ を

$$H_\lambda(s) = \begin{cases} e^{-\lambda\{s(3-s)+n(n+1)\}} & s \in \mathcal{F}^1,\ s \neq n+2,\ n+3,\ \cdots\ -n+1,\ -n,\ \cdots \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

によって define する．各 $\lambda > 0$ に対して $H_\lambda(s) \in \mathfrak{Z}_{n,0}(\mathcal{F}^1)$．

また H_λ は (C') を満す．定理 1 によって $\hat{g}_\lambda = H_\lambda$ なる $g_\lambda \in \mathcal{C}^{(1)}_{n,0}(G)$ が唯一つ存在する．これは確かに (C) を満す．

<u>命題 1.</u> $\{g_\lambda : \lambda > 0\}$ は $\mathcal{C}^{(1)}_{n,0}(G)$ における Dirac sequence である．即ち，$\forall f \in \mathcal{C}^{(1)}_{n,0}(G)$ に対して

$$\int_G f(g)\, g_\lambda(g)\, dg \to f(e) \quad (\lambda \downarrow 0)$$

が成立つ．

さて，定理 2 によって級数

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} g_\lambda(y^{-1}\gamma x)$$

は $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ 上の連続関数に収束する．そこで今 $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ 上の $\mathrm{Hom}(V_{n,0}, V_{n,0})$-値 C^∞-関数 G_λ を

$$G_\lambda(x, y) = \int_K \Big(\sum_\gamma g_\lambda(y^{-1}\gamma x k)\Big) \rho^{n,0}(k^{-1})\, dk$$

によって定義する．このとき

<u>命題 2.</u> $G_\lambda(x, y)$ は heat equation (B) の elementary

solution である.

§6. Asymptotic behaviour of the spectra

各 $\lambda>0$ に対し, $C^\infty(\mathcal{F}_{n,0})$ 上の正定値作用素 T_λ を

$$(T_\lambda \varphi)(x) = \int_{\Gamma\backslash G} G_\lambda(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

によって定める. G_λ は $\Gamma\backslash G\times\Gamma\backslash G$ 上の連続関数であるから T_λ は trace class の作用素で, trace を計算することにより次の定理が得られる:

<u>定理 4</u> (trace formula) 次の等式が成り立つ:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} n_j\, e^{-\lambda r_j} = \frac{1}{2n+1}\sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\Gamma\backslash G} g_\lambda(g^{-1}\gamma g)\,dg\,.$$

$\lambda\downarrow 0$ における $\mathcal{L}(\lambda)$ の behaviour をおめよう. 上の公式から

$$\begin{aligned}(2n+1)\,\mathcal{L}(\lambda) &= g_\lambda(e)\,\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\\ &\quad + \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_{\Gamma\backslash G} g_\lambda(g^{-1}\gamma g)\,dg\end{aligned}$$

であるが

$$g_\lambda(e) = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \sum_{\substack{1\le q\le n\\ n-q\in\mathbb{Z}}} (2q-1)(n+q)(n-q+1)\, e^{-\lambda((q+1)(2-q)+n(n+1))}$$

$$+\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\{(\frac{3}{2})^2+s^2+n(n+1)\}}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+s^2\right)s\, \mathrm{th}\,\pi(s+in)\,ds.$$

したがって，$\lambda \downarrow 0$ のとき

$$g_\lambda(e) \sim \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2 \lambda^{-2}$$

が得られる．残った項については，命題1と集合

$$\{\, g^{-1}\gamma g : \quad g\in G,\ \gamma\in\Gamma-\{e\} \,\}$$

が K と交わらない G の closed set をなすことから

$$\sum_{\gamma\neq e}\int_{\Gamma\backslash G} g_\lambda(g^{-1}\gamma g)\,dg \to 0 \quad (\lambda\downarrow 0)$$

が成立つと推測できる．特に，g_λ 自身 regular growth なることが云えれば上のことは成立つ．このとき

$$\mathcal{L}(\lambda) \sim \frac{2n+1}{16\pi^2}\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\,\lambda^{-2} \quad (\lambda\downarrow 0)$$

或いは

$$N(r) \sim \frac{2n+1}{32\pi^2}\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\,r^2 \quad (r\to+\infty)$$

なることがわかる．

参 考 文 献

[1] M.Eguchi & A.Kowata, On the Fourier transform of rapidly decreasing functions of L^p type on a symmetric space, Hiroshima Math. J.,6(1976), 143-158.

[2] L.Ehrenpreis & F.I.Mautner, Some properties of the Fourier transform on semisimple Lie groups I, Ann. of Math.61(1955) 409-439; II, Trans.A.M.S.84(1957), 1-55; III, Trans.A.M.S. 90 (1959), 431-484.

[3] R.Gangolli, Asymptotic behaviour of spectra of compact quotients of certain symmetric spaces, Acta Math.121 (1968) 151-192.

[4] R.Gangolli & G.Warner, On Selbeg's trace formula, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 328-343.

[5] Y.Matsushima, A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds, J. Diff. Geom. 1 (1967), 99-109.

[6] 牟田洋一, 一般ローレンツ群上の調和解析, 数理解析研究所講究録, 182 (1973), 119-140.

[6'] Y.Muta, Fourier analysis on the De Sitter group and the trace formula, to appear.

[7] Y.Shimizu, An analogue of the Paley-Wiener theorem for certain function spaces on the generalized Lorentz group, J. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo 16 (1969), 13-51.

[8] R.Takahashi, Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralises, Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 289-433.

[9] P.C.Trombi & V.S.Varadarajan, Spherical transforms on semisimple Lie groups, Ann. of Math. 94 (1971), 246-303.