数理解析研究所講究録
281巻 1976年 211-226

対称空間上の種々の境界に対する境界値問題

東大 理 大島利雄

1. Helgason - Okamoto 予想は [4] により解決されたが，それは，non-compact semi-simple Lie group G の，対称空間 X 上の球函数の空間による表現と，X の Martin 境界 M 上のある line bundle の Hyperfunction valued sections の空間による表現（主系列表現に対応）とが同値になるというものであった。対称空間 X の rank を l とすると，X の境界といわれるものは 2^l 個存在し，そのうちで最大の次元のものが X の Martin 境界である。Martin 以外の境界上にも同様に G の表現空間が作れるが（退化系列表現），それに対応する同値な表現空間が対称空間上の球函数の空間の中に存在する。後者を特徴づけることと，その2つの空間の同値性を調べることが目的であるが，まだ一般的にはできていない。

2. 記号． 主な記号は [7] Chapter I. に従う．

$G\ (\leftrightarrow \mathfrak{g})$: non-compact semi-simple Lie group with finite center
（$\mathfrak{g}$ は G に対応する Lie algebra）

$G = N^- A_p K = K A_p N^+$: G の岩沢分解 ($\leftrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- + \mathfrak{a}_p + \mathfrak{k}$)

$\quad = K A_p K$: 〃 Cartan 分解

$\mathcal{M}^* \equiv N_K(A_p)$: A_p の K における normalizer

$\mathcal{M} \equiv Z_K(A_p)$: 〃 〃 centralizer ($\leftrightarrow \mathfrak{m}$)

$W \equiv \mathcal{M}^*/\mathcal{M}$: G の Weyl group (w.r.t. ($\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_p$))

$w \in W$ に対し, w の $N_K(A_p)$ に於ける代表元を1つ固定し, それを m_w と書く。

Σ : ($\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_p$) に対応する root system (multiplicity があるときは重複して入れる)

Σ^+ : positive roots の集合

Ψ^+ : positive simple roots の集合

$\mathfrak{n}^+$ ($\mathfrak{n}^-$) は positive (negative) roots に関する固有空間で張られる $\mathfrak{g}$ の線型部分空間である。

$l \equiv \#(\Psi^+) = \mathrm{rank}(G/K) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_p$: 対称空間 G/K の階数

$\mathfrak{a}_p^\vee$: $\mathfrak{a}_p$ の双対空間 ($\simeq \mathbb{R}^l$). その複素化を $\mathfrak{a}_{p,\mathbb{C}}^\vee$ と書く.

W の元 w は $\mathfrak{a}_p$ に $\mathrm{Ad}(m_w)$ で作用する。

〃 $\mathfrak{a}_{p,\mathbb{C}}^\vee$ に $\lambda^w(X) = \lambda(\mathrm{Ad}(m_w^{-1})X)$ で作用 $\begin{pmatrix} \lambda \in \mathfrak{a}_{p,\mathbb{C}}^\vee \\ X \in \mathfrak{a}_p \end{pmatrix}$

Killing form (,) によって $\mathfrak{a}_p$ は実 Euclid 空間になるがそれにより, $\mathfrak{a}_p$ と $\mathfrak{a}_p^\vee$ が同一視され, $\mathfrak{a}_p^\vee$ も実 Euclid 空間となる。このとき, W は Ψ^+ の元に関する reflections の集合 S ($\#(S) = l$) で生成される.

Θ : Ψ^+ のある部分集合．（2^l 個ある）

W_Θ : Θ の元に関する reflections で生成される W の部分群

（= S のある部分集合で生成される W の部分群）

$\langle\Theta\rangle^+$ （$\langle\Theta\rangle^-$）: Θ で生成される positive (negative) roots

$W_{\Theta,u} \equiv \{ w \in W ;\ (\langle\Theta\rangle^+)^{w^{-1}} \subset \Sigma^+ \}$

<u>定理 1.1.2.13.[7]</u>　$\begin{array}{ccccc} W & = & W_\Theta & \cdot & W_{\Theta,u} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ w & = & w_s & \cdot & w_u \end{array}$ は unique な分解である．

$P_0 \equiv M A_p N^+$: minimal parabolic group

$P_\Theta \equiv \bigcup_{w \in W_\Theta} P_0 m_w P_0$: parabolic group

G の parabolic subgroup とは P_Θ と共役な群のことで，Θ が異なれば P_Θ は互に共役とはならない．よって，G の parabolic subgroup は共役なものを除いて 2^l 個存在する．

$\mathfrak{n}^\pm(\Theta) \equiv \sum_{\lambda \in \langle\Theta\rangle^\pm} \mathfrak{g}^\lambda$．ただし，

$\mathfrak{g}^\lambda \equiv \{ X \in \mathfrak{g} ;\ ad(H)X = \lambda(H)X,\ \ H \in \mathfrak{a}_p \}$

$\mathfrak{g}(\Theta)$: $\mathfrak{n}^+(\Theta)$ と $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ で生成される $\mathfrak{g}$ の sub Lie algebra : semi-simple

$\mathfrak{a}_p(\Theta) \equiv \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}_p$　（$\xrightarrow{exp} A_p(\Theta) \subset G$）

$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta) + \mathfrak{a}_p(\Theta)$　（$\xrightarrow{exp} M_\Theta \subset G$）

$\mathfrak{a}_\Theta = \mathfrak{a}_p$ における $\mathfrak{a}_p(\Theta)$ の直交補空間．

$\mathfrak{n}^+_\Theta \equiv \sum_{\lambda \in \Sigma^+ - \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}^\lambda$　（$\xrightarrow{exp} N^+_\Theta \subset G$）

$\mathcal{M}_\Theta \equiv \mathcal{M} \cdot M_\Theta$

$P_\Theta = \mathcal{M}_\Theta A_\Theta N^+_\Theta$: Langlands 分解（$\leftrightarrow \mathfrak{m}_\Theta + \mathfrak{a}_\Theta + \mathfrak{n}^+_\Theta$）

◎ 球函数表現 (class 1 w.r.t. K)

$U(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra. これを G 上の左 G-不変微分作用素の全体 ($\mathbb{D}(G)$) と同一視する.

すなわち, 例えば $X_1 \cdot X_2 \in U(\mathfrak{g})$, $f \in \mathcal{B}(G)$ に対し,

$$\begin{cases} X_1 \cdot X_2(f) = X_1(X_2(f)) \\ (X_i f)(g) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(ge^{tX_i}) - f(g)) \end{cases}$$

の様に定義する.

$X = G/K$: non-compact な対称空間

$\mathbb{D}(G)^K \equiv \{ D \in U(\mathfrak{g})\ ;\ Ad(k)D = D\ ,\ {}^\forall k \in \mathfrak{k} \}$

とおくと, X 上の左 G-不変微分作用素の全体は

$\mathbb{D}(G/K) \simeq \mathbb{D}(G)^K / \mathbb{D}(G)^K \cap \mathbb{D}(G)\mathfrak{k}$

となるが, これは l 個の生成元 $\Delta, \Delta_2, \ldots, \Delta_l$ を持つ多項式環と同型になる (従って可換環である)

$S(\mathfrak{a}_p)$ を $\mathfrak{a}_p$ の symmetric tensor algebra とし,

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & S(\mathfrak{a}_p) \\ \Psi & & \Psi \\ D & \longmapsto & D\mathfrak{a}_p \end{array}$$

を, $D\mathfrak{a}_p \equiv D \mod U(\mathfrak{g})\mathfrak{k} + \mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g})$ となる様に定義する。

$\rho \equiv \frac{1}{2} \Sigma_{\lambda \in \Sigma^+} \lambda$ とおいて, $S(\mathfrak{a}_p)$ の algebra endomorphism

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{a}_p) & \longrightarrow & S(\mathfrak{a}_p) \\ \Psi & & \Psi \\ D & \longmapsto & {}'D \end{array} \quad \text{が} \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{a}_p & \longrightarrow & \mathfrak{a}_p \\ \Psi & & \Psi \\ H & \longmapsto & {}'H = H - \rho(H) \end{array}$$

を満たす様に定義する。

定理 6.15 [3]　$\mathbb{D}(G/K) \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{a}_p)^W \equiv \{D \in S(\mathfrak{a}_p)\,;\ \mathrm{Ad}(m_w)D = D\ \ {}^\forall w \in W\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(G/K) & \xrightarrow{\sim} & S(\mathfrak{a}_p)^W \\ \Psi & & \Psi \\ D & \longmapsto & {}'D_{\mathfrak{a}_p} \end{array}$$

$\lambda \in \mathfrak{a}_{p,\mathbb{C}}^\vee$ を固定し，次の X 上の方程式を考える．

$$\mathcal{M}_\lambda\ :\ (D - \chi_\lambda(D))\,u = 0\ ,\quad {}^\forall D \in \mathbb{D}(G/K)$$

但し，$\chi_\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(G/K)\,;\,\mathbb{C})$ で，$D \in \mathbb{D}(G)^K$ のとき，$\chi_\lambda(D) = \chi_\lambda({}'D_{\mathfrak{a}_p})$，$H \in \mathfrak{a}_p$ のとき $\chi_\lambda(H) = \lambda(H)$ となる様に定義する。

この解空間を $\mathcal{A}(G/K\,;\mathcal{M}_\lambda)$ とおく。$\mathbb{D}(G/K)$ には X 上の Laplace - Beltrami operator が存在するので，$\mathcal{M}_\lambda$ の解は X 上で実解析的である．

$\mathcal{M}_\lambda \equiv U(\mathfrak{g}) / \sum_{D \in \mathbb{D}(G)^K} U(\mathfrak{g})(D - \chi_\lambda(D))$　(= a left $U(\mathfrak{g})$ - module)

とおけば，$\mathcal{A}(G/K\,;\mathcal{M}_\lambda) = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(\mathcal{M}_\lambda\,;\,\mathcal{B}(G))$ となることに注意しよう。空間 $\mathcal{A}(G/K\,;\mathcal{M}_\lambda)$ は左 G - 加群であり，G の表現空間となる。

◎ 境界上の表現

G/P_Θ : 対称空間 G/K の境界

$\mathfrak{a}_{\Theta,\mathbb{C}}^\vee$: $\mathfrak{a}_\Theta$ の双対空間の複素化

$$\rho_{\Theta} \equiv \rho|_{\mathfrak{a}^\vee_{\Theta,\mathbb{C}}} \qquad (\rho = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Sigma^+}\lambda)$$

$\lambda \in \mathfrak{a}^\vee_{\Theta,\mathbb{C}}$ を固定し，

$$\mathcal{B}(G/P_{\Theta};\lambda) \equiv \{ f \in \mathcal{B}(G)\ ;\ f(g m_{\Theta} a_{\Theta} n^+_{\Theta}) = e^{(\lambda-\rho_{\Theta})\log a_{\Theta}} f(g),$$
$$\forall m_{\Theta} \in M_{\Theta},\ \forall a_{\Theta} \in A_{\Theta},\ \forall n^+_{\Theta} \in N^+_{\Theta} \}$$

とおくと，$\mathcal{B}(G/P_{\Theta};\lambda)$ は左 G-加群となり，G の表現空間である。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}^\vee_{\Theta,\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathfrak{a}^\vee_{\mathfrak{p},\mathbb{C}} \\ \Psi & & \Psi \\ \lambda & \longmapsto & p(\lambda) \end{array} \quad を \quad \begin{array}{ccccc} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} & = & \mathfrak{a}(\Theta) & + & \mathfrak{a}_{\Theta} \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ H & = & H_{\mathfrak{a}(\Theta)} & + & H_{\mathfrak{a}_{\Theta}} \end{array}$$
$$p(\lambda)(H) = (\lambda-\rho_{\Theta})(H_{\mathfrak{a}_{\Theta}}) + \rho(H)$$

によって定義すれば，

$$\mathcal{B}(G/P_{\Theta};\lambda) \subset \mathcal{B}(G/P_0;p(\lambda))$$

となることに注意する。

⊙ <u>Poisson 積分</u>

Poisson 積分は
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(G/P_{\Theta};\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{B}(G/K) \\ \Psi & & \Psi \\ f & \longmapsto & \mathcal{P}_{\lambda}(f)(gK) = \int_K f(gk)\,dk \end{array}$$

により定義されるが，

<u>定理 4.6.Ch.III [2]</u> $\mathcal{P}_{\lambda}(\mathcal{B}(G/P_{\Theta};\lambda)) \subset \mathcal{A}(G/K);\mathcal{M}_{p(\lambda)})$

となる。

この Poisson 積分は次の様に表わすこともできる。

$$\mathcal{P}_\lambda(f)(gK) \equiv \int_K f(gk)\,dk$$

$$= \int_K e^{-(\lambda+\rho_\Theta)\cdot H_\Theta(g^{-1}k)} f(k)\,dk$$

$$(\text{cf. Lemma 44 [1]}) = \int_{N_\Theta^-} e^{-(\lambda+\rho_\Theta)\cdot H_\Theta(g^{-1}n)} \cdot e^{(\lambda-\rho_\Theta)\cdot H_\Theta(n)} \cdot f(n)\,dn$$

ここで，$\begin{array}{ccccc} G & = & K M_\Theta & A_\Theta & N_\Theta^+ \\ \Downarrow & & \Downarrow\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ g & = & k\ m_\Theta & e^{H_\Theta(g)} & n_\Theta^+ \end{array}$ により $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathfrak{a}_\Theta \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g & \longmapsto & H_\Theta(g) \end{array}$ が定義

される。また，　（定理 1. 2. 4. 10 [7]）

$$G \supset N_\Theta^- M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+ = N_\Theta^- P_\Theta \quad : \text{open dense, unique な分解}$$

が存在することに注意しよう。

3. Helgason - Okamoto 予想

"$\mathfrak{a}_{p,\mathbb{C}}^\vee$ の generic な元 λ に対し，$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/P_0;\lambda) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$ が（左からの G の作用と可換な）同型写像となる" というのが Helgason - Okamoto 予想であるが，次の定理が成立する。

<u>定理</u>　$\lambda \in \mathfrak{a}_{p,\mathbb{C}}^\vee$ が次の条件 (*) を満たすならば

$$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/P_0;\lambda) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$$

は同型写像である.

$$(*) \qquad -2\cdot\frac{(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \notin \{1,2,3,\ldots\}, \quad {}^\forall\alpha \in \Sigma^+$$

証明は [4] にあるが，そこでは $-2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha) \notin \mathbb{Z}$ という条件になっている。Martin 以外の境界の場合を考えるには，(*) の形に条件を弱める必要があり，それについては [5]，[6] 等を参照して下さい。

証明には次の事実が重要である。$\Psi^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ とおき，A_p 上の函数 t_j を $t_j(a) = e^{-\alpha_j \log a}$ $(j=1,\ldots,\ell)$ と定義すれば $A_p \ni a \longmapsto (t_1(a), \ldots, t_\ell(a)) \in \mathbb{R}^\ell$ により A_p は $(0,\infty)^\ell$ と同一視される。A_p^+ を $(0,1)^\ell$ に対応する A_p の開集合とする（positive Weyl chamber に対応）。

$G/K = X$ の正則元の全体を X' と書くと，X' は X の中で open dense となるが，Cartan 分解を用いれば

$$X \supset X' \simeq K/M \times A_p^+ \simeq K/M \times (0,1)^\ell$$

とみなせる。$\widetilde{X} = K/M \times (-1,1)^\ell$ とおくと，$\mathbb{D}(G/K)$ の元は $\widetilde{X}$ 上の微分作用素に実解析的に延長され，方程式 $\mathcal{M}_\lambda$ は Martin 境界 $M = G/P_0 \simeq KA_pN^+/MA_pN^+ \simeq K/M \times \{0\} \subset \widetilde{X}$ を edge とする確定特異点型の微分方程式系になる。M 上に境界値をとる操作が（定数倍を除いて）Poisson 積分の逆作用素になっていることを用いて定理が証明される。

Martin 境界の実現であるが，岩沢分解を用いて

$$X = N^-A_pK/K \simeq N^-A_p \simeq N^- \times (0,\infty)^\ell \subset \widetilde{\widetilde{X}} \equiv N^- \times (-\infty,\infty)^\ell$$

$$M = G/P_0 \overset{\text{open dense}}{\supset} N^-MA_pN^+/MA_pN^+ \simeq N^- \times \{0\} \subset \widetilde{\widetilde{X}}$$

と表わすこともできる。$\tilde{X}$ や $\tilde{\tilde{X}}$ をはりあわせて，Gが左から作用する compact real analytic manifold が構成できるが，それに関しては別の機会にゆずる。

4. 問題と予想

Poisson 積分 $\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/P_\Theta;\lambda) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_{p(\lambda)})$ を考えよう。もし，$\lambda \in \mathfrak{a}^\vee_{\Theta,\mathbb{C}}$ が generic ならば $p(\lambda)$ は (*) の条件を満たすので（例えば，$\lambda = \rho_\Theta$），$\mathcal{P}_\lambda$ は単射であることがわかる。そこで，"$\mathcal{P}_\lambda$ の像を決定せよ" というのが問題となる。以下予想を述べる。

i) $U(\mathfrak{g})$ の両側 K - 不変な left ideal $\mathcal{J}$ ($\supset U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$) が存在して

$$\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{B}(G/P_\Theta;\lambda)) = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(U(\mathfrak{g})/\mathcal{J};\ \mathcal{B}(G)).$$

$U(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ は確定特異点型微分方程式系で，その決定方程式の最高次の部分の作る homogeneous ideal ($\subset S(\mathfrak{a}_p)$) を $\mathring{J}$ とおくと $S(\mathfrak{a}_p)/\mathring{J}$ は W の表現空間となるが，その表現は W_Θ における恒等表現からの W への誘導表現 ($\mathrm{ind}_W 1_{W_\Theta}$) と同型となる。特に，$\dim S(\mathfrak{a}_p)/\mathring{J} = \#(W)/\#(W_\Theta) = \#(W_{\Theta,u})$

ii) $\mathcal{M}_\lambda$ の解空間から，その特性根 $((\rho-\lambda^w)(H_1),\ldots,(\rho-\lambda^w)(H_\ell))$ に対する境界値を対応させる写像を γ_w とおくと，

$$\gamma_w \circ \mathcal{P}_\lambda = 0, \quad \forall w \in \{W_\Theta - \{1\}\} \times W_{\Theta,u}$$

逆に上式によって，$\mathcal{P}_\lambda$ の像が特徴づけられる。
ここで，$\{H_1,\cdots,H_\ell\}$ は $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}$ の dual basis である。

iii) $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{B}(G/P_\Theta;\lambda)) = \mathcal{P}_\mu(\mathcal{B}(G/P_0;\mu))$

ただし，$\mu = p(\lambda)^{w_\Theta^\circ} \in \mathfrak{a}_{p,\mathbb{C}}^\vee$ で，w_Θ° は（simple root に関する reflection の積で表わしたときの）長さが最長の W_Θ の元。

5 例

まず，予想 ii) の trivial な例を挙げる。単位円内の調和函数を考えよう。境界上の定数函数の Poisson 積分は単位円内の定数函数全体となり，それは Neumann 境界値が 0 として特徴づけられる。これは，$G = P_\Theta = SL(2,\mathbb{R})$ とした場合である。このときは，iii) も明らかである。ii) は Martin 境界上の intertwining operator の核や像を調べる問題と関連している。(cf. [2])

以下，$G = SL(n,\mathbb{R})$，$P_\Theta = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \in SL(n,\mathbb{R}) \right\}$ の場合の例を述べよう。（$l = \operatorname{rank}(SL(n,\mathbb{R})/SO(n)) = n-1$）

$$M_\Theta = \left\{ \begin{bmatrix} \det g & \\ & g \end{bmatrix} ;\ g \in GL(n,\mathbb{R}),\ \det g = \pm 1 \right\}$$

$$N_\Theta^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right\},\quad \mathfrak{a}_\Theta = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n}t & & & \\ & -\frac{t}{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\frac{t}{n} \end{bmatrix} \ni H_t \ ;\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A_p = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \ni a \in SL(n,\mathbb{R}) \ ;\ a_\nu > 0 \right\},\quad t_\nu(a) = \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \quad (\nu = 1,\dots,l)$$

$$N^- = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1 \end{bmatrix} ;\ n_{ij} \in \mathbb{R},\ i > j \right\}$$

$$\widetilde{\widetilde{X}} = N^- \times \mathbb{R}^\ell = \{(n_{ij}, t_\nu)\} \supset N^- \times (0,\infty)^\ell \simeq N^- A_p \simeq X$$

という座標系で考える。

$\lambda e \in \mathfrak{a}^\vee_{\Theta,\mathbb{C}}$　$(e(H_t) \equiv t,\ \lambda \in \mathbb{C})$ に対し，$\mathcal{P}_{\lambda e}(\mathcal{B}(G/P_\Theta; \lambda e))$ の満たす方程式 $U(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$ が計算でき，次の様になる。すなわち，$u \in \mathcal{B}(G/K)$ に対して，

$$\mathcal{M}_\lambda : \quad \Delta_{jk} u = L_{i,jk} u = T_{i,j,k,\ell} u = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i > \ell,\ j > k \text{ で} \\ i, j, k, \ell \text{ は互に異なる} \end{array}\right)$$

ただし，

$$\Delta_{jk} \equiv (\widetilde{X}_j - 1)\widetilde{X}_k - X_{jk}^2, \qquad T_{i,j,k,\ell} \equiv X_{\overline{ij}} X_{\overline{k\ell}} - X_{\overline{ik}} X_{\overline{j\ell}}$$

$$L_{i,jk} \equiv \begin{cases} (\widetilde{X}_i - 1) X_{jk} - X_{ij} X_{\overline{ik}} & (i > j \text{ のとき}) \\ \widetilde{X}_i X_{jk} - X_{ji} X_{\overline{ki}} & (i < j \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$X_{\overline{ij}} \equiv \begin{cases} X_{ij} & (i > j \text{ のとき}) \\ X_{ji} & (i < j \text{ のとき}) \end{cases}$$

X_{ij} は第 (i, j) 成分のみが 1 の $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ の元である。

$$X_{ij} = (\Pi_{j \le \nu \le i-1} t_\nu)(\Sigma_{i \le \mu \le n} n_{\mu i} \partial/\partial n_{\mu j}) \qquad (i > j)$$

$$\widetilde{X}_i \equiv (X_{ii} - \tfrac{1}{n} I_n) + \frac{\lambda}{n-1} + \frac{1}{2}$$

$$X_{ii} - \tfrac{1}{n} I_n = t_{i-1}\partial/\partial t_{i-1} - t_i \partial/\partial t_i .$$

$e_j \in \mathfrak{a}^\vee_{p,\mathbb{C}}$ を，$e_j(\log a) = \log a_j$ と定義すると

$$\Psi^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}, \quad \alpha_j = e_j - e_{j+1}, \quad \rho = \Sigma_{j=1}^n (\tfrac{n+1}{2} - j) e_j$$

$$p(\lambda e) = \lambda e_1 - \Sigma_{k=2}^n \left(\frac{\lambda}{n-1} + k - \frac{n+2}{2}\right) e_k$$

となる．$\left(a = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \in A_p\right)$.

Wは $a=(a_1,\dots,a_n)$ の置換群($\simeq\mathfrak{S}_n$)と同一視される。index の置換と考え，$s_j=(j,j+1)$ とおくと

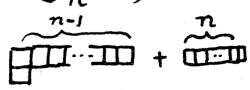
$$\mathfrak{S}_n=\langle s_1,\dots,s_\ell\rangle = W_{\textcircled{H}}\times W_{\textcircled{H},u}$$

$$W_{\textcircled{H}}=\langle s_2,\dots,s_\ell\rangle\simeq\mathfrak{S}_{n-1}$$

$$W_{\textcircled{H},u}=\{w_j\equiv s_1\cdots s_{j-1}=(j,j-1,\dots,2,1)\ ;\ 1\le j\le n\}$$

$\mathcal{N}_\lambda$ は $\{t_1=\cdots=t_\ell=0\}$ を edge とする確定特異点型微分方程式系となり，その決定方程式の根は，

$$\begin{aligned}\Lambda_j&=\Big(\tfrac{1}{n-1}\lambda+\tfrac12,\ \tfrac{2}{n-1}\lambda+\tfrac22,\ \dots,\ \tfrac{j-1}{n-1}\lambda+\tfrac{j-1}{2},\ -\tfrac{n-j}{n-1}\lambda+\tfrac{n-j}{2},\ -\tfrac{n-j-1}{n-1}\lambda+\tfrac{n-j-1}{2},\\&\qquad\dots,\ -\tfrac{1}{n-1}\lambda+\tfrac12\Big)\\&=\big((\rho-p(\lambda)^{w_j})(H_1),\dots,(\rho-p(\lambda)^{w_j})(H_\ell)\big)\qquad(j=1,\dots,n).\end{aligned}$$

さて，$\mathcal{N}_\lambda=U(\mathfrak{g})/\mathcal{J}$，$\mathcal{J}=U(\mathfrak{g})k+\sum U(\mathfrak{g})\Delta_{jk}+\sum U(\mathfrak{g})L_{i,jk}+\sum U(\mathfrak{g})T_{i,j,k,\ell}$ であるが，$\{k,\Delta_{jk},L_{i,jk},T_{i,j,k,\ell}\}$ は $\mathcal{N}_\lambda$ の involutive base であることが確かめられる。$X_{ii}-\frac{1}{n}I_n=x_i$ とおくと($\sum x_i=0$)，i) において $\mathring{J}=\langle x_1+\cdots+x_n,\ x_ix_j\rangle$ であって，$\mathring{J}$ はW-不変 ideal ($\subset S(\mathfrak{a}_p)$) となり，$W=\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/\mathring{J}$ における表現の Young diagram は  で，それは予想 i) で述べた通りである。今の場合 $\mathcal{J}=U(\mathfrak{g})k+U(\mathfrak{g})\Delta_{21}$ が確かめられるが，一般に次の予想が成立すると思われる。

i) の補足．$P_1,\dots,P_m$ ($\in S(\mathfrak{a}_p)$) を含む最小のW-不変 ideal

が $\mathring{J}$ であるとする。このとき，決定方程式の最高次の部分が P_j に等しい様な $\mathcal{J}$ の元 L_j が存在して，

$$\mathcal{J} = U(\mathfrak{g})\mathfrak{k} + \Sigma_{j=1}^{m} U(\mathfrak{g}) L_j \qquad \text{となる。}$$

さて，$SL(n,\mathbb{R})$ の場合にもどろう。$\mathbb{D}(G/K) = \mathbb{C}[\Delta, \Delta_2, \ldots, \Delta_\ell]$ であるが，Δ_j は Capelli の恒等式から容易に計算される。例えば，<u>$n=3$ のとき</u>は

$$\Delta = (\tilde{X}_{11}+1)\tilde{X}_{22} + \tilde{X}_{22}(\tilde{X}_{33}-1) + (\tilde{X}_{33}-1)(\tilde{X}_{11}+1) - X_{21}^2 - X_{32}^2 - X_{31}^2 + 1$$

$$\Delta_2 = (\tilde{X}_{11}+1)\tilde{X}_{22}(\tilde{X}_{33}-1) - (\tilde{X}_{11}+1)X_{32}^2 - \tilde{X}_{22}X_{31}^2 - (\tilde{X}_{33}-1)X_{21}^2 - X_{32}X_{31}X_{21} - X_{21}X_{32}X_{31}$$

ここで，$\tilde{X}_{ii} \equiv X_{ii} - \frac{1}{n} I_n = t_{i-1}\partial/\partial t_{i-1} - t_i \partial/\partial t_i$.

また，$p(\lambda) = \lambda e_1 - \frac{1}{2}(\lambda-1)e_2 - \frac{1}{2}(\lambda+1)e_3$

$$\rho - p(\lambda) = (1-\lambda)(e_1-e_2) + \frac{1}{2}(1-\lambda)(e_2-e_3)$$

$$\chi_{p(\lambda)}(\Delta) = \frac{3}{4}(1-\lambda)(1+\lambda)$$

$$\chi_{p(\lambda)}(\Delta_2) = -\frac{1}{4}\lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

であり，さらに

$$\Delta - \chi_{p(\lambda)}(\Delta) = \Delta_{32} + \Delta_{31} + \Delta_{21} \in \mathcal{J}$$

$$\Delta_2 - \chi_{p(\lambda)}(\Delta_2) = (\tilde{X}_1+1)\Delta_{32} - X_{21}L_{3,21} - X_{31}L_{2,31} - \frac{1}{2}(1+\lambda)(\Delta_{21}+\Delta_{31}) \in \mathcal{J}$$

と表わせる。

この様に，一般に $\Theta \neq \phi$ ならば，$\mathcal{M}_{p(\lambda)} = U(\mathfrak{g})/\Sigma_{D\in \mathbb{D}(G)^K} U(\mathfrak{g})(D-\chi_{p(\lambda)}(D)$

は、既約 $U(\mathfrak{g})$-加群とならず、$\mathcal{N}_\lambda$ という商加群が存在する。これは、表現空間 $\mathcal{B}(G/P_0;p(\lambda))$ $(\simeq \mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_{p(\lambda)}))$ が既約でなく、$\mathcal{B}(G/P_{\text{Ⓗ}};\lambda)$ という G-不変部分空間が存在することに対応している。

さて、$p(\lambda)$ が (*) の条件を満たすなら

$$\mathcal{B}(G/P_{\text{Ⓗ}};\lambda) \subset \mathcal{B}(G/P_0;p(\lambda)) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{P}_{p(\lambda)}} \mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_{p(\lambda)})$$

であった。次に、

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}(G/P_{\text{Ⓗ}};\lambda) \subset & \mathcal{B}(G/P_0;p(\lambda)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{B}(K/M) \\ & \Psi & & \Psi \\ & f(g) & \longmapsto & \varphi(kM) \equiv f(k) \end{array}$$

と同一視すれば、$\mathcal{B}(G/P_{\text{Ⓗ}};\lambda)$ は $\mathcal{B}(K/M)$ の中で、右 $(M_{\text{Ⓗ}} \cap K)$-不変な函数とみなせる。Bruhat 分解より

$$G = \bigcup_{w\in W} m_w N^- M A_p N^+ \supset N^- M A_p N^+ \ : \text{open dense}$$

がわかるので、

$$(G/P_0 \simeq)\ K/M \simeq \bigcup_{w\in W} m_w N^- \ : \text{open dense set による covering}$$

と考えることができる。この同一視で $\mathcal{B}(G/P_{\text{Ⓗ}};\lambda)$ は、N^- 上で $N^-(\text{Ⓗ})$-不変な函数に対応していることが、$N^- P_0 \cap P_{\text{Ⓗ}} = N^-(\text{Ⓗ})\, P_0$ となることから言える。

今の場合 $N^-(\text{Ⓗ}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & * & \ddots & \\ 0 & * & \cdots * & 1 \end{bmatrix} \in N^- \right\}$ である。また、

Poisson 核 $e^{-(\lambda+\rho_{\text{Ⓗ}})H_{\text{Ⓗ}}(g^{-1}n)}$ は $\mathcal{N}_\lambda$ を満たすことが容易に

確かめられるので，まず $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{B}(G/P_{\textcircled{H}};\lambda)) \subset \mathcal{A}(G/K;\mathcal{N}_\lambda)$ がわかる。$\mathcal{P}_\lambda$が単射であることは，$\mathcal{P}_{p(\lambda)}$ が単射である【それは，3の定理において，特性根 $s_1=((\rho-p(\lambda))(H_1),\cdots,(\rho-p(\lambda))(H_\ell))$ に対して $\mathcal{M}_{p(\lambda)}$ の解の境界値をとる操作を γ_1 とおくとき，$\gamma_1\circ\mathcal{P}_{p(\lambda)}=c(\sqrt{-1}\,p(\lambda))\cdot\mathrm{id}$.（$c$ は Harish-Chandra の c-函数）となることからわかる】ことから明らか。

$\mathcal{P}_\lambda$ の像が $\mathcal{N}_\lambda$ の解全体であることは次の様にして言える。$\mathcal{N}_\lambda$ の解 u は十分多くの方程式を満たすので，その境界値 $\gamma_1(u)$ もまだ方程式（即ち，Martin 境界上への $\mathcal{N}_\lambda$ の induced equation）を満たしている。それは，N^- 上で考えて

$$(**) \qquad Y_{jk}\,\gamma_1(u)=0 \qquad (j>k\geq 2)$$

$$\left(Y_{jk} \equiv \textstyle\sum_{j\leq\mu\leq n} n_{\mu j}\,\partial/\partial n_{\mu k} \right)$$

と表わせる。$Y_{jk}\gamma_1(u)=0$ は，$L_{1,jk}\,u=0$ から得られる。方程式 $(**)$ は $\gamma_1(u)$ が右 $N^-(\textcircled{H})$-不変であることを示しているから，$\gamma_1(\mathcal{A}(G/K;\mathcal{N}_\lambda)) \subset \mathcal{B}(G/P_{\textcircled{H}};\lambda)$ がわかる。以上をあわせれば，$\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}(G/P_{\textcircled{H}};\lambda)$ と $\mathcal{A}(G/K;\mathcal{N}_\lambda)$ との同型を与えていることが言える。

$\boxed{\text{結果}}$ 今の例において，$-\frac{n}{n-1}\lambda+\frac{n}{2}\equiv\mu\notin\{2,3,4,\dots\}$ ならば，$\mathcal{P}_\lambda : \mathcal{B}(G/P_{\textcircled{H}};\lambda)\longrightarrow\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_{p(\lambda)})$ は同型。

（$c(\sqrt{-1}\,p(\lambda))=\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1-\mu}{2})/\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-\mu}{2})$ に注意しよう．）

6 文献

[1] Harish-Chandra : Spherical functions on a semisimple Lie group, I, Amer. J. Math., 80 (1958), 241-310.

[2] S. Helgason : A duality for symmetric space with applications to group representations, Advances in Math., 5 (1970), 1-154.

[3] S. Helgason : Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, 1962.

[4] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka : Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, to appear.

[5] M. Kashiwara and T. Oshima : Systems of differential equations with regular singularity and their boundary value problems, to appear.

[6] K. Minemura and T. Oshima : Boundary value problems with regular singularity and Helgason-Okamoto conjecture, to appear in the proceeding of symposium on algebraic analysis 1976. 4. 19 ~ 4. 22.

[7] G. Warner : Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I. II., Springer, 1972.