数理解析研究所講究録
281巻 1976年 120-162

偏微分方程式の正則解の解析接続

広島大 理*) 津野 義道

Contents

Introduction

Part I: Linear equation

§ 1. simple characteristic point —— —— sufficient condition

§ 2. simple characteristic point —— —— necessary condition

§ 3. pluri-harmonic surface

§ 4. equation of the Fuchsian type

Part II: Non-linear equation

§ 5. sufficient condition

§ 6. necessary condition for first order equations of two variables

References

*) 1976。4月から 岡山大 教養 の予定.

Introduction

複素n次元空間 $\mathbb{C}^n$ 内のある領域における正則関数を係数にもつ偏微分方程式の正則な解の解析接続の可能性について調べる。局所的な問題のみを扱うから、以下すべて、$\mathbb{C}^n$ の原点 0 の近傍 U で考える。$\mathbb{C}^n$ の点を $z=(z_1,\cdots,z_n)$ であらわし、原点 0 の近傍 U の subdomain Ω で、Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に 0 があるものを考える。即ち、ある実数値関数 $\varphi(z)$ があって、$\varphi(0)=0$ であり、

$$\Omega = \{ z \in U \mid \varphi(z) < 0 \}$$

であるとする。$\varphi(z)$ の滑らかさについては、適宜必要なだけ仮定する。

$P(z,D)$ を U での線型偏微分作用素、即ち

$$P(z,D) = \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(z)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha$$

で、各係数 $a_\alpha(z)$ は U で正則（holomorphic）であるとする。又、$P(z,\xi)$ の主要部を、$P_m(z,\xi)$ と記す。即ち、

$$P_m(z,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z)\,\xi^\alpha .$$

この時、次の問題を考える事にする。

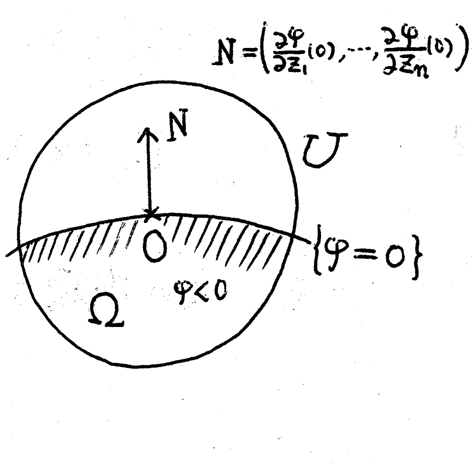
問題　$u(z)$ を Ω で正則な関数で、方程式

$$P(z,D)\,u(z) = 0 \tag{1}$$

をみたすものとする。この時、$u(z)$ が 0 の近傍で正則になる為の、必要条件又は十分条件は何か？

この問題に先鞭をつけたのは、1969年 C. O. Kiselman [7] で、作用素 P が定数係数の場合 Fourier 変換と、関数の増大度の評価を用いて、2つの convex sets $\Omega_1 \subset \Omega_2$ に対して、Ω_1 での正則解が、Ω_2 にまで解析接続される為の十分条件を示した。次いで、M. Zerner [18] は、J. Leray [9] による Cauchy-Kowalewsky の定理の精密化を使って次の定理を証明した。

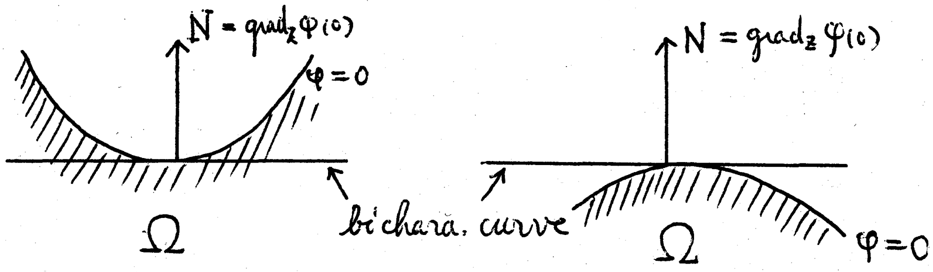
定理 1 (M. Zerner)　$\partial\Omega$ が 0 で $P(z,D)$ に関して非特性的、即ち、$P_m(0, \mathrm{grad}_z\,\varphi(0)) \neq 0$ ならば、方程式 (1) の Ω での解は、0 の近傍で正則になる。



さらに、G. Bengel [2], J.M. Bony - P. Schapira [3] 等により非特性的な境界に関して、より詳しい考察がなされた。特に Bony-Schapira

ま、上の定理を用いて、境界の近傍での解の存在他、いくつかの興味ある応用を得ている。

ここでは、この Zerner の定理を、いくつかの方面に拡張する事を試みる。先ず、Part I で、線型方程式の場合を扱う。§1, §2 では、$\partial\Omega$ が P に関して 0 で simple characteristic である場合を考える。この時は、Hörmander [5]が、Holmgren の定理を拡張した方法を援用し、原点の近傍を非特性的な曲面群で cover できるか否かが問題となる。1階非線型な特性方程式 $P_m(z, \mathrm{grad}_z \Phi(z)) = 0$ の解は、P の陪特性帯に沿う常微分方程式を解くことによって与えられるから、(Hamilton-Jacobi の理論)、結局、Ω が、0で、陪特性曲線の方向について convex になるか、concave になるかで状況が異ってくる。~~convex~~ concave になる場合を §1 で、~~concave~~ convex になる場合を §2 で扱う。



(§1 の図)　　　　(§2 の図)

§3では、境界面$\partial\Omega$が、ある多重調和関数のlevel surfaceになっている場合を考察する。$P(z,D)$に関しては全く一般の特性点になっていてもかまわない。多重調和関数は、ある正則関数の実部として局所的にあらわせるから、この節では本質的には、ある超平面を超える解析接続を考えている事になる。つづいて§4では、ある超平面に関するFuchs型作用素が導入され、多価性を許す解析接続について考察する。

最後に、Part IIで一般の非線型方程式の解の解析接続について論ずる。§5で得られる十分条件については、Zernerの証明方法を採用する為、Cauchy-Kowalewskyの定理が保障するuniqueな正則解の存在範囲を、定量的に求める事が必要である。ついで§6では、特性曲線の方向に関するΩの凸性の仮定の下で、原点で特異点をもつ解を構成する。

各節の内容は、既に発表されているか（§1, §2, §5, §6）又はまもなく出版される（§§3, 4）ので、本稿では、全体の概略を主にして述べ、細部は、各論文を参照していただきたいと思います。

Part I : Linear equation

§ 1. simple characteristic point — sufficient condition

解析接続の為の十分条件を得る idea は、Hörmander が Holmgren の定理を simple characteristic surface にまで拡張した工夫（Theorem 5.3.2 in [5]）及び、Treves [11] Zachmanoglou [17] による、それらの精密化を採用する。key lemma は次の通り。

<u>Lemma 1</u>　次の (i) ～ (vi) をみたす様な real-valued C^1 function $F(z)$ が存在すると仮定する。

(i) $P_m(z, \operatorname{grad}_z F(z)) \neq 0$

(ii) $^\exists c_0 < F(0) < {}^\exists c_1$

(iii) $\{z \in U \mid F(z) \leqq c_1\} \cap \overline{\Omega^c}$ は compact

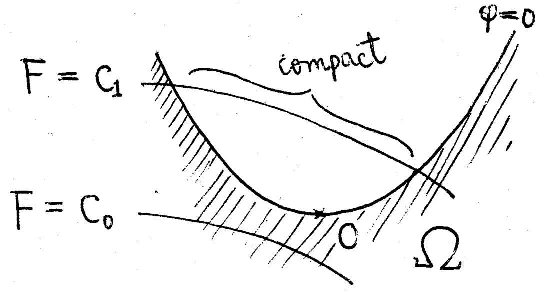
(iv) $\{z \in U \mid F(z) \leqq c_0\} \cap \overline{\Omega^c} = \phi$

(v) $\{z \in U \mid F(z) \leqq c_0\} \neq \phi$

(vi) $\{z \in U \mid F(z) < c\}$ は $^\forall c \ (c_0 < c < c_1)$ に対して、単連結

この時、方程式 (1) の Ω での正則解 $u(z)$ は $\{z \in U \mid F(z) < c_1\}$ にまで、解析接続可能である。

証明



$u(z)$ が $\{z \in U \mid F(z) < c\}$ で正則となるような定数 c の上限を α とする。条件(iv)と(v)より、この様な α が存在して、$\alpha \geqq C_0$ となる。そこで、$\alpha < C_1$ として矛盾となる事をいえばよい。(i)より $\{F(z) = \alpha\}$ は、非特性的な超曲面であり、Zernerの定理(定理1)を使えば、$u(z)$ は、この曲面上の各点で正則になる。ここで(iii)と(vi)を使えば、α を上限にとった事に矛盾する。　q.e.d.

この補題を使えば、次の定理が得られる。証明の key point は、補題の条件(i)〜(vi)をみたすような関数 $F(z)$ を構成する事であり、technical に多少面倒な計算を要するので、ここでは省略する。(詳細は[12]の§3, P527−P535)

定理2　$\partial\Omega$ が 0 で P に関して simple characteristic ならば、$t=0$ で $(0, \mathrm{grad}_z\varphi(0))$ を通る P の(複素)陪特性曲線の、ある方向に関する $\partial\Omega$ の法曲率が負になる時、方程式(1)の Ω での正則な解は、0 の近傍で正則になる。

上の定理の仮定をよりはっきりと述べれば、次の様になる。 $z(t)$ $(t\in\mathbb{C})$ を complex bi-characteristic curve through $(0, \mathrm{grad}_z\varphi(0))$ at $t=0$ とすれば、ある $t_0\neq 0$ $(t_0\in\mathbb{C})$ があって (i.e. t_0 一方向があって), real parameter τ に関して

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi(z(\tau t_0))\Big|_{\tau=0} < 0 .$$

この仮定をさらに explicit に bicharacteristic equation と Euler's identity を使ってかき直せば、次の様になる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k}\Big\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(0)\, t_0 P_m^{(j)}(0,N)\, t_0 P_m^{(k)}(0,N) \\
&\quad + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\bar z_k}(0)\, t_0 P_m^{(j)}(0,N)\, \bar t_0 \overline{P_m^{(k)}(0,N)} \\
&\quad + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar z_j\partial\bar z_k}(0)\, \bar t_0 \overline{P_m^{(j)}(0,N)}\, \bar t_0 \overline{P_m^{(k)}(0,N)}\Big\} \\
&+ \sum_j\Big\{P_m^{(j)}(0,N)P_{m,j}(0,N)\, t_0^2 + \overline{P_m^{(j)}(0,N)}\,\overline{P_{m,j}(0,N)}\,\bar t_0^2\Big\} \\
&< 0
\end{aligned}$$

但し
$$\begin{cases} N = \mathrm{grad}_z\varphi(0) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1}(0), \cdots, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_n}(0)\right) \\[2mm] P_m^{(j)}(z,\zeta) = \dfrac{\partial}{\partial\zeta_j}P_m(z,\zeta), \quad P_{m,j}(z,\zeta) = \dfrac{\partial}{\partial z_j}P_m(z,\zeta) \end{cases}$$

§2. simple characteristic point —— necessary condition

この節では、ある analytic variety に singularity をもつような、方程式(1)の解を構成し、その variety が、原点を通るが、Ωとは交わらない様に出来る条件を求める事にする。

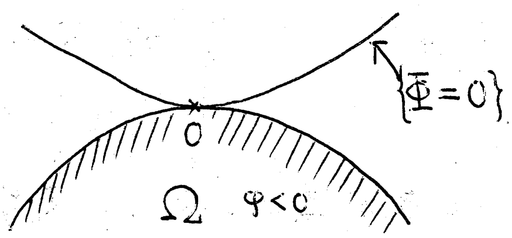
まず singularity をもつ解の構成については、Y. Hamada [4] C. Wagschal [16] 他による Cauchy 問題の結果を応用する。即ち、非特性的な複素超平面上に、例えば、pole をもつような Cauchy data を考え、それに対する Cauchy 問題の解を、Pの特性関数による展開式で求める方法である。これによれば、data の特異性は、そこを通る characteristic variety に沿って伝播する事がわかる。又、その証明を follow すれば、同様の手法によって、任意の個数の特性関数の零点に singularity をもつ様な解を構成できる。(i.e. 特性関数を"すべて"使う必要はない。Cauchy 問題を解く立場では、"すべて"必要ではあるが。) 詳しくは [12] の §4 に self-contained な形で述べてある。

<u>補 題 2</u> 原点 O の近傍で、方程式(1)の解 $u(z)$で、次の形をしたものが存在する。

$$u(z) = \frac{F(z)}{\Phi(z)} + G(z)\log\Phi(z) + H(z)$$

但し、$F(z)$, $G(z)$, $H(z)$ は 0 の近傍で正則, $u(z)$ は 0 で singularity をもつ。又 $\Phi(z)$ は $P_m(z, \mathrm{grad}_z \Phi(z)) \equiv 0$ をみたす正則関数（ $\Phi(0) = 0$ ）。

この補題によって、解析接続の必要条件を求める問題は結局、P の characteristic function $\Phi(z)$ で、$\Phi(0) = 0$ となり、しかも



$$\Omega \cap \{z \in U \mid \Phi(z) = 0\} = \phi$$

となるようなものを構成する問題に帰着された事になる。従って、特に $\varphi(z)$ は 0 で pseudo-convex (i.e. $\partial\bar{\partial}\varphi$ が semi-positive definite) になる事が、必要となる。 さらに、最近 J. J. Kohn – L. Nirenberg [8] によって、$\mathbb{C}^2$ の中の、strongly pseudo-convex でなく、ただの擬凸領域で、その境界の点で 0 になる任意の正則関数の零点集合が、必ず Ω と交ってしまう例が発見された。従って、上の問題を考える時、Ω が 0 で strongly pseudo-convex を仮定する事が、必要になってくる。Ω が強擬凸の時、必要ならばその境界関数 $\varphi(z)$ を取り換える事によって、$\varphi(z)$ は pluri-subharmonic function (i.e. $\partial\bar{\partial}\varphi$ が strict に positive definite) であるとしてよい。

問題は、1階非線型方程式 $P_m(z, \mathrm{grad}_z \Phi(z)) = 0$ の解で、$\Phi(0) = 0$ かつ、$\Omega \cap \{\Phi = 0\} = \phi$ なるものを求める事である。ここで、P が simple-characteristic である事を使えば、適当な座標変換で、常に $\mathrm{grad}_z \varphi(0) = N = (0, \cdots, 0, 1, 0)$ かつ、$t = 0$ で $(0, N)$ を通る bi-characteristic strip $(z(t), \xi(t))$ が、$z(t)$ は z_n-軸に、$\xi(t)$ は一定に

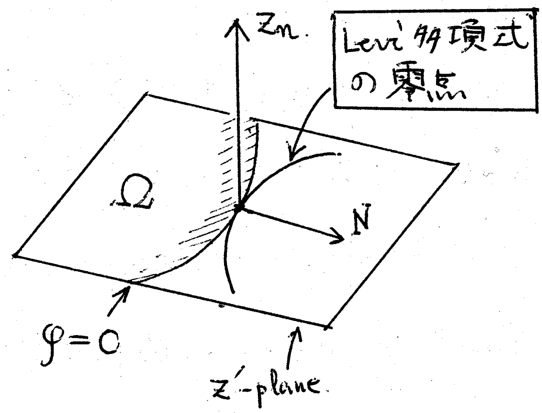
i.e.
$$\begin{cases} z(t) = (0, \cdots, 0, t) \\ \xi(t) = (0, \cdots, 1, 0) \end{cases}$$

となる様にできる。変換の方法は少々面倒なのでここでは省略する。([12] の P 544 − 546)

この時、$z_n = 0$ を初期平面とし、そこに Levi-多項式 $f(z')$ $(z' = (z_1, \cdots, z_{n-1}))$ を初期値にとる Cauchy 問題を解く。即ち

$$\begin{cases} P_m(z, \mathrm{grad}_z \Phi(z)) = 0 \\ \quad \Phi(z', 0) = f(z') \overset{\mathrm{def.}}{=} z_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial z_k}(0)\, z_j z_k \\ \mathrm{grad}_z \Phi(0) = N = (0, \cdots, 0, 1, 0) \end{cases}$$

ここで、$\varphi(z)$ が strict に pluri-subharmonic である事を使えば、φ の Levi 多項式 $f(z')$ は、z'-plane 内では Ω と交わらない。そこで



さらに z_n－方向に関して

(I) $\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi(0,\cdots,0,\tau t_0)\Big|_{\tau=0} > 0 \quad \text{for } {}^\forall t_0 \neq 0$

（τは real parameter）

(II) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial z_n}(0)=0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{z}_j\partial z_n}(0)=0 \quad (j\neq n)$

を仮定する。(I)は z_n－方向に関して Ω が convex になっている事を意味し、(II)は grad $\varphi(z)$ が z_n－方向に対してあまり変動しない事を意味している。(I),(II)を仮定すれば、order の比較をする事により、原点の近傍で、$Re\,\Phi(z)\geqq 0$ ならば、$\varphi(z)\geqq 0$ になる事が示され、対偶をとれば、$\Phi(z)$ の零点集合は、Ω に入らない事がわかる。従って、次の定理が得られた。

<u>定理 3</u> $\partial\Omega$ が 0 で strongly pseudo-convex かつ、P に関して simple characteristic であるとする。又次の (I)(II) を仮定する。

(I) $t=0$ で $(0, \mathrm{grad}_z\varphi(0))$ を通る P の複素陪特性曲線のあらゆる方向に関する $\partial\Omega$ の法曲率が正になる。

(II) $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_m^{(j)}(0,N)=0$ をみたす任意の $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対して、

$$\sum_{j,k=1}^{n}\left\{\lambda_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial z_k}(0) + \bar{\lambda}_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(0)\right\} P_m^{(j)}(0,N)$$

$$+ \sum_k \lambda_k P_{m,k}(0,N) \qquad = 0$$

この時、方程式(1)のΩで正則な解で、原点をsingularityにもつものが存在する。

§3. pluri-harmonic surface

Ωの境界を与える関数$\varphi(z)$が、方程式

$$\partial\bar{\partial}\varphi = 0$$

をみたすものとする。そのような$\varphi(z)$は、多重調和関数(pluri-harmonic)とよばれ、局所的に、ある正則関数$\Phi(z)$の実部になる事が知られている。従ってUで、

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}\ \Phi(z)$$

であるとしてよい。この節での主定理は、次の通りである。

定理 4　正則関数$P_m(z, \mathrm{grad}_z \Phi(z))$が、複素超平面$\{\Phi(z)=0\}$上で、恒等的に0ではないと仮定する。この時、方程式(1)のΩでの正則な解は、原点の近傍で正則になる。

証明　仮定より、$\Phi(z)$ は non-degenerate な正則関数であるから、適当な座標変換をする事により、$\Phi(z)=z_1$ であるとしてよい。この時、$\mathrm{grad}_z \Phi(z) = (1, 0, \cdots, 0)$ となるから、定理の仮定は、$(\partial/\partial z_1)^m$ の係数を $a(z)$ とすれば、　$a(0, z') \neq 0$　但し、$z' = (z_2, \cdots, z_n)$ となる。従って、z'-空間で再び適当な座標変換を行えば、

$$a(0, z_2, 0, \cdots, 0) \neq 0$$

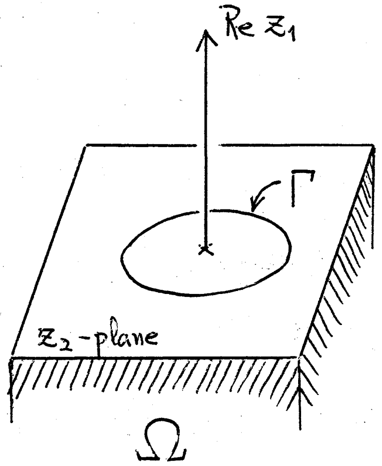
としてよい。ところが、一変数正則関数の零点は離散的であるから、$r>0$ を十分小さくとって、$|z_2| = r$ 上では、

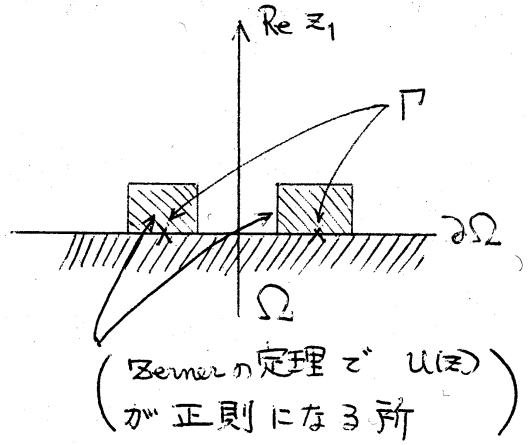
$$a(0, z_2, 0, \cdots, 0) \neq 0 \quad \text{on} \quad |z_2| = r$$

となるようにできる。即ち、

$$\Gamma = \{ (0, z_2, 0, \cdots, 0) \mid |z_2| = r \}$$

とおけば、$\Gamma \subset \partial\Omega$ で、かつ $\partial\Omega$ は Γ では $P(z, D)$ に関して非特性的になっている。





さて、$u(z)$ を、方程式(1)の $\Omega=\{z\in U \mid \mathrm{Re}\, z_1<0\}$ における正則な解とする。ここで Zerner の定理(定理1)を使えば、$u(z)$ は Γ の近傍で正則になる。ところが、Γ は compact であるから、ある定数 $\rho>0$ $(0<\rho<r)$ が存在して、$u(z)$ は Γ の ρ-近傍、即ち

$$\{z \mid |z_1|<\rho,\ r-\rho<|z_2|<r+\rho,\ |z_j|<\rho \quad j=3,\cdots,n\}$$

と、Ω で正則になる。(図を参照) そこで、原点を中心とする多重円板(半径 ρ) $\Delta=\{z \mid |z_j|<\rho \quad j=1,\cdots,n\}$ で正則な函数 $\tilde{u}(z)$ を次の式で定義する。

$$\tilde{u}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{u(z_1,\zeta,z_3,\cdots,z_n)}{\zeta-z_2}\,d\zeta$$

この時、$\Delta\cap\Omega$ では、Cauchy の積分定理により、$u(z)=\tilde{u}(z)$ となるから、結局、$u(z)$ は原点の近傍 Δ まで、解析接続される事が示された。　　q.e.d.

<u>注意</u>　最近、P. Pallu de La Barrière ([10] and his These Univ. Paris VII) は、超函数(hyperfunction)の立場から、正則解の接続問題、境界の近傍での解の存在定理、他を取り扱い、一般的な必要条件、十分条件を得ている。彼は、その応用例として、上記定理4と同じ状況の下で、

次の結果を得ている。

<u>P. Pallu de La Barrière の結果</u>　正則関数 $P_m(z, \mathrm{grad}_z \Phi(z))$ が、複素超曲面 $\{\Phi(z)=0\}$ 上で、原点で高々1位の零点をもてば、方程式(1)の Ω での正則な解は、原点の近傍で正則になる。

§4. equation of the Fuchsian type

前節の定理4では、$P_m(z, \mathrm{grad}\,\Phi(z))$ が超曲面 $\{\Phi(z)=0\}$ 上で、恒等的に0とはならない場合を扱ったが、本節では、$\Phi(z)$ が、$P(z, D)$ の特性関数ではないが、(即ち、原点の近傍全体では、$P_m(z, \mathrm{grad}\,\Phi(z)) \neq 0$ となる。) analytic variety $\{\Phi(z)=0\}$ 上に制限した時、そこで恒等的に0になる場合を調べる事にする。

以後、簡単の為、$\Phi(z)=z_1$ とする。又、超平面 $\{z_1=0\}$ に関する Fuchs 型作用素の定義のために、次の用語を導入する。即ち、微分単項式 $c(z_1, z')\, z_1^l \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^\alpha$ で、$c(0, z') \neq 0$ となるものを、(z_1 に関して) <u>weight</u> $p-l$ をもつという。

この時、微分作用素 $P(z,D)$ に、次の条件をおく。

(i) $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^m$ の係数は、$a(z)z_1^k$ $(0 \leqq k \leqq m)$ とかけて、$a(z) \neq 0$ in U

(ii) $P(z,D)$ は、weight が高々 $m-k$ の微分単項式の和として、あらわせる。

(iii) 主要部 $P_m(z,D)$ では、$a(z)z_1^k\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^m$ を除くすべての項の weight は、高々 $m-k-1$ である。

<u>定義</u> 上の条件 (i)〜(iii) をみたす微分作用素 $P(z,D)$ を、(z_1 に関する) weight $m-k$ の <u>Fuchs 型微分作用素</u>という。

<u>注意</u> 上の定義は、M.S. Baouendi – C. Goulaouic [1] から採用した。但し、彼等は、条件 (iii) を、低階の項にまで要求している。

ここでは、斉次方程式を扱っている為、$a(z)^{-1}z_1^{m-k}$ をかける事により、一般に $a(z) \equiv 1$, $k=m$ であるとしてよい。この時、方程式は次の様にかける。

$$P(z,D)=\sum_{p+|\alpha|\leqq m} a_{(p,\alpha)}(z)\, z_1^p\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^\alpha$$

特に、その主要部は、

$$P_m(z,D)=z_1^m\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^m+z_1\sum_{\substack{p+|\alpha|=m\\ p<m}} b_{(p,\alpha)}(z)\, z_1^p\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^\alpha.$$

又、Fuchs型の接続定理では、$\{z_1=0\}$で分岐する多価関数も考えなければならず、その場合 $\arg z_1$ は自由にとり得るから、問題は純粋に局所的という訳にはいかず、global な解析接続定理を準備しておく事が必要になる。

$\mathbb{C}^n$ に内積 $<\,,\,>$ を bi-linear form で入れる。即ち、$z=(z_1,\cdots,z_n)$ と $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ に対して、

$$<z,\lambda>=\sum_{j=1}^{n} z_j\lambda_j$$

とし、$|z|^2=<z,\bar{z}>$，又 S^{2n-1} を、この距離に関する単位球とする。さらに、z_0 を通り complex normal が ζ であるような、実超平面を $H(\zeta,z_0)$ と記す。

$$H(\zeta,z_0)=\{z\mid \mathrm{Re}<z-z_0,\zeta>=0\}$$

又、z_0 を明記する必要のない場合は、$H(\zeta)$ と略記する。$\mathbb{C}^n$ の subset V と、V 上の微分作用素 $P(z,D)$ に対して、V 内のある点 z_0 で $P_m(z_0,\zeta)=0$ となるよ

うな $\zeta\in S^{2n-1}$ の全体の、S^{2n-1} 内での閉包をとったものを $\mathrm{Car}\,p(V)$ と記す。$\mathrm{Car}\,p(V)$ は compact である。この時、次の、global な解析接続定理が知られている。

定理 5 (Bony-Schapira [3], Hörmander [5] の Theorem 5.3.3) $\Omega_1\subset\Omega_2$ を2つの open convex sets とする。Ω_2 と交わる実超平面 $H(\zeta)$ で、ζ が $\mathrm{Car}\,p(\Omega_2)$ に属するものは、必ず Ω_1 とも交わると仮定する。この時、Ω_1 で正則な方程式(1)の解は、Ω_2 にまで、解析接続可能である。

証明は、Hörmander [5] で、hyperbolic operator の基本解の support が、ある cone に含まれる様にとれる事を示す際に重要な役割をはたした Holmgren 定理の global な型 (Theorem 5.3.3 in [5]) と全く同様の手法でできる。

さて、以上の準備の下で、Fuchs 型の微分方程式の正則な解に対する接続定理は、次の様に述べる事ができる。前と同様、U は $\mathbb{C}^n$ の原点 0 の近傍とし、

$$\Omega=\{z\in U \mid \mathrm{Re}\, z_1>0\}$$

とする。

<u>定 理 6</u>　$P(z,D)$ は z_1 に関して Fuchs 型であるとする。この時、任意の $C>0$ に対して、$r>0$ を十分小さくとれば、方程式(1)の Ω で正則な解は、

$$\begin{cases} |z_j| < r & j=1,2,\cdots,n \\ |\arg z_1| < C \end{cases}$$

の範囲で、$(\log z_1, z_2, \cdots, z_n)$ に関して正則になる。

証明は、$(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 空間から $(\log z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 空間に変数変換をして調べる事にする。即ち

$$z_1 = e^t \quad (\text{i.e. } t = \log z_1)$$

とおいて、$P(z,D)$, U, Ω etc を、すべて (t, z') 空間に移して考える。この時 $z_1^k \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^k$ は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}-1\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial t}-k+1\right)$$

に移るから、P の主要部 $P_m(z,D)$ は、低階の項を無視して、

$$\tilde{P}_m\left(t, z', \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z'}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m + e^t \sum_{\substack{p+|\alpha|=m \\ p<m}} b_{(p,\alpha)}(e^t, z')\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^\alpha$$

に変換される。この変換による要点は、次の2点である。

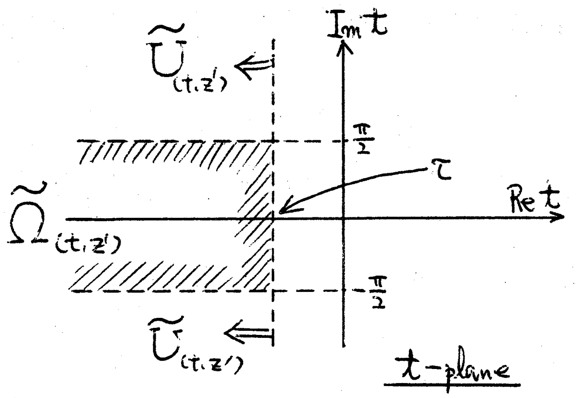
1) 超平面 $\{t=0\}$ が、非特性的になる事

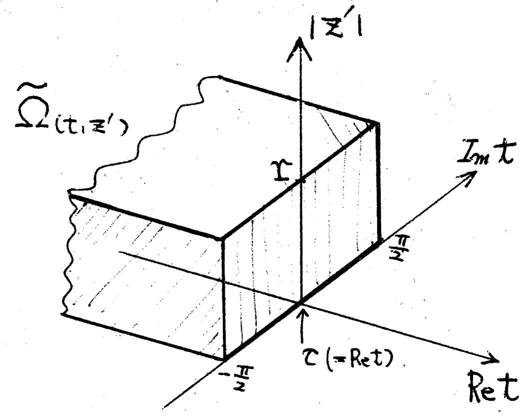
2) $\mathrm{Re}\,t$ が十分小 ($\to -\infty$) になる時、任意の特性面は t 軸に平行になっていく事。(次の補題3.)

以後、領域を定量的に測る必要があるので、次の記号を導入する。

$$\begin{cases} U_z(\rho, r) = \{ z \mid |z_1| < \rho, \ |z_j| < r \quad j=2,\cdots,n \} \\ \Omega_z(\rho, r) = \{ z \in U_z(\rho, r) \mid \mathrm{Re}\, z_1 > 0 \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{U}_{(t,z')}(\tau, r) = \{ (t,z') \mid \mathrm{Re}\,t < \tau, \ |z_j| < r, \ j \geq 2 \} \\ \widetilde{\Omega}_{(t,z')}(\tau, r) = \{ (t,z') \in \widetilde{U}_{(t,z')}(\tau, r) \mid |\arg t| < \frac{\pi}{2} \} \end{cases}$$





即ち、変換 $t = \log z_1$ によって、$U_z(\rho, r)$ は $\widetilde{U}_{(t,z')}(\log\rho, r)$ に、$\Omega_z(\rho, r)$ は $\widetilde{\Omega}_{(t,z')}(\log\rho, r)$ に移される。特に Ω に対しては bi-holomorphic である。又、$P(z, D)$ は、$\widetilde{P}(t, z', \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial z'})$ に変換されるものとする。補題を2つ準備する。

補題 3　任意の定数 $C>0$ に対して、τ ($\tau<\log\rho$) を十分小さく ($\to-\infty$) とれば、任意の $\zeta\in \mathrm{Car}_{\tilde{P}}(\tilde{U}_{(t,z')}(\tau,r))$ に対して、次の不等式が成立する。

$$C|\zeta_1|\leqq|\zeta_2|+\cdots+|\zeta_n|.$$

証明　$\zeta\in S^{2n-1}$ を、$\tilde{U}_{(t,z')}(\tau,r)$ 内のある点で、$\tilde{P}$ に関して特性的になってしまう complex vector とすれば、

$$\begin{aligned}|\zeta_1|^m &\leqq e^{\tau}\sum_{\substack{p+|\alpha|=m\\ p<m}}|b_{(p,\alpha)}|\cdot|\zeta_1^p\zeta'^{\alpha}|\\ &\leqq M\,e^{\tau}\left\{(|\zeta_1|+\cdots+|\zeta_n|)^m-|\zeta_1|^m\right\}\end{aligned}$$

（但し U で $|b_{(p,\alpha)}(z)|\leqq M$ とした。）

となるから、

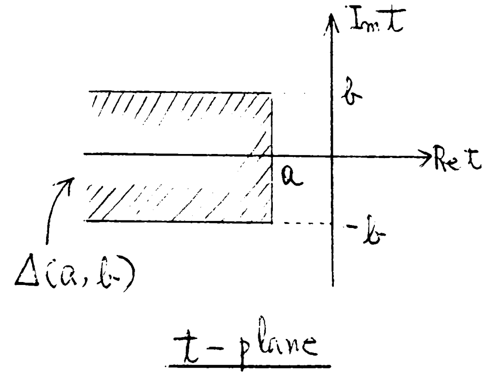
$$\left\{(1+M^{-1}e^{-\tau})^{\frac{1}{m}}-1\right\}|\zeta_1|\leqq|\zeta_2|+\cdots+|\zeta_n|$$

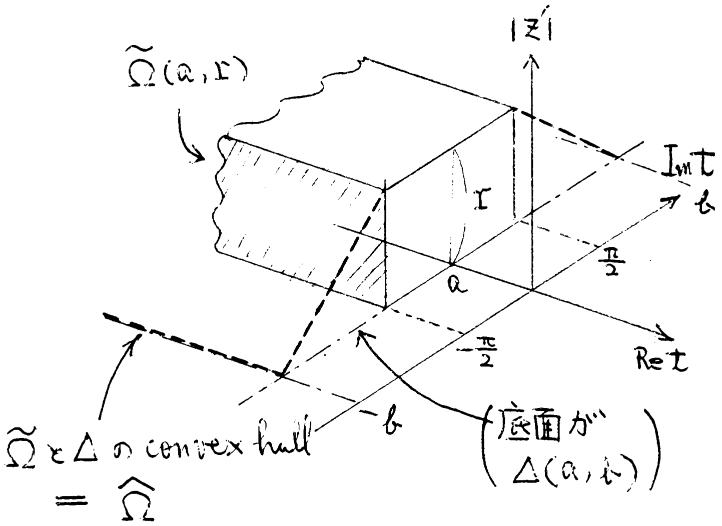
が成り立つが、$\{\cdots\}$ の項は $\tau\to-\infty$ とすれば、いくらでも大きくなるから、補題が証明された事になる。　q.e.d.

次に、複素平面上の領域 $\Delta(a,b)$ を次の様にとる。

$$\Delta(a,b)=\{t\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\,t<a,\ |\mathrm{Im}\,t|<b\}.$$

さらに、$\widetilde{\Omega}_{(t,z')}(a, r)$ と $\{(t,z') \mid t \in \Delta(a,b),\ z'=0\}$ との成す convex hull を $\widehat{\Omega}_{(t,z')}(\Delta(a,b), r)$ と記す。$\widehat{\Omega}$ は open convex になる。





<u>補題 4</u>　$C > 0$ を任意の定数として、$\zeta \in S^{2n-1}$ を、次の不等式が成り立つ様な任意の vector とする。

$$C|\zeta_1| \leqq |\zeta_2| + \cdots + |\zeta_n| \quad .$$

この時、実超平面 $H(\zeta)$ で、$\widehat{\Omega}_{(t,z')}(\Delta(a, \frac{\pi}{2}+Cr), r)$ と交わるものは、必ず $\widetilde{\Omega}_{(t,z')}(a, r)$ とも交わる。

<u>証明の概略</u>　$\widehat{\Omega}$ は $\widetilde{\Omega}$ と Δ との convex hull であり、$\widetilde{\Omega} \cap \Delta_{\text{at } z'=0} \neq \phi$ であるから、$\widehat{\Omega}$ と交わるような実超平面 $H(\zeta)$ は、$\widetilde{\Omega}$ か Δ かのどちらかには必ず交わる。従って、題意をみたす ζ に対して、Δ と交わるような実超平面 $H(\zeta)$ は、$\widetilde{\Omega}$ とも交わる事を示せばよい。

それは、$H(\xi)$ の"傾き"がわかっているから、上図を参照すれば、ほとんど直感的に明らかである。

定理6の証明の概略.　方程式(1) の Ω での正則な解は、(t, z') 空間では、$\widetilde{\Omega}$ での、$\widetilde{P}$ に対する正則な解になる。補題3, 4より、$\Omega_1 = \widetilde{\Omega}$, $\Omega_2 = \widehat{\Omega}$ として、定理5を適用すれば、$\widetilde{\Omega}$ での正則な解は、$\widehat{\Omega}$ にまで解析接続される。$\widehat{\Omega}$ を少し削って、解を直積の型の領域に制限すれば、定理6が得られる。

Part II: Non-linear equation

§5. sufficient condition

まず、古典的によく知られている Cauchy-Kowalewsky の定理を follow して、その unique な正則解の存在範囲を、方程式及び Cauchy data から定量的に求める必要がある。はじめは、未知関数を $w_1(z), \cdots, w_N(z)$ とする quasi-linear な 1階偏微分方程式系を考える。

$$(2) \quad \frac{\partial w_j}{\partial z_1} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=2}^{n} g_{jkl}(z', w) \frac{\partial w_k}{\partial z_l} + h_j(z', w), \quad j = 1, \cdots, N$$

ここで、g_{jkl} 及び h_j は、$|z_\nu| \leqq r$, $|w_\mu| \leqq r$ で正則であると仮定し、M をそこでの最大値とする。

$$M = \max\{|g_{jkl}|, |h_j|\}.$$

注意すべき点は、方程式(2)の右辺が、z_1 に explicit には depend していない事である。次の補題が essential である。

<u>補　題　5</u>　　方程式(2)の解で、初期平面$\{z_1 = 0\}$で、$w_j(0, z') = 0$　($j=1, \cdots, N$) をみたすものは、unique に、次の領域で存在する。

$$|z_1| < \frac{r}{4MNn} \quad , \quad |z_2| + \cdots + |z_n| < \frac{r}{4}$$

<u>証明の概略</u>　(F. John [6] P82－P86)　解の一意性は、formal solution が一意的に決まっていくので、明らかである。その形式解の収束は、優級数の方法で示される。Cauchy の積分公式より、g_{jkl}, h_j の優級数として、

$$\frac{Mr}{r - (z_2 + \cdots + z_n + w_1 + \cdots + w_N)}$$

がとれる。そこで、$\zeta = z_1$, $\xi = z_2 + \cdots + z_n$ とすれば、方程式(2)の右辺の係数を優級数におきかえた方程式の解が、はじめの解の優級数となるから、次の初期値問題の解を求めればよい事になる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \zeta} = \dfrac{Mr}{r - \xi - NW}\left(N(n-1)\dfrac{\partial W}{\partial \xi} + 1 \right) \\ W(0, \xi) = 0 \end{cases}$$

ところが、この問題の解は、具体的に解く事ができて、次の様になる。

$$W(\zeta, \xi) = \frac{r-\xi}{Nn} - \frac{\sqrt{(r-\xi)^2 - 2MNrn\zeta}}{Nn}$$

但し、$\sqrt{\ \ ''\ ''\ }$ の分枝は、$\zeta = 0$ の時 $r - \xi$ となるものをとる。従って

$$|\zeta| < r/4MNn \quad , \quad |\xi| < r/4$$

の時、根号の内部は 0 にならないし、上の領域は単連結だから、W はそこで正則になる。従って、はじめの解の存在範囲が求まった。 q.e.d.

つぎに、未知関数を $u_1(z), \cdots, u_N(z)$ とする m 階の微分方程式系を考える。

$$(3)\qquad \frac{\partial^m u_j}{\partial z_1^m} = f_j\left(z, u_1, \cdots, u_N, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha u_k, \cdots\right) \qquad j=1,\cdots,N$$

但し、f_j は、z 及び $(\partial/\partial z)^\alpha u_k$ で $|\alpha| \leqq m$ かつ $\alpha_1 \leqq m-1$、に関する正則関数で、その正則域は、$|z_\nu| \leqq r$ $p_{k,\alpha}\left(=(\partial/\partial z)^\alpha u_k\right)$ については entire であるとする。又、平面 $\{z_1 = 0\}$ 上での初期条件を、次の様におく。

$$(4)\qquad \frac{\partial^l u_j}{\partial z_1^l}(0, z') = \varphi_{j,l}(z') \qquad \left(\begin{array}{l} j=1,\cdots,N \\ l=0,\cdots,m-1 \end{array}\right)$$

再び、$\varphi_{j,l}$ は $|z_\nu| \leqq r$ で正則であるとする。この時、諸定数 $C, M, \hat{N}, \hat{M}$ を、次のようにとる。

$$C = \max\left\{ \left|\left(\frac{\partial}{\partial z'}\right)^{\alpha'} \varphi_{j,l}\right| \quad 但し\ |\alpha'| + l \leqq m+1 \right\}$$

$$M = \max\left\{ 1, |f_j|, \left|\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right|, \left|\frac{\partial f_j}{\partial p_{k,\alpha}}\right| \ \middle|\ 但し\ \begin{array}{l} |z_\nu| \leqq r \\ |p_{k,\alpha}| \leqq C + r \end{array} \right\}$$

(注)（M は C に depend する。）

$$\hat{N} = \{ |\alpha| \leqq m \text{ となる多重指数 } \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \text{ の個数} \}$$

$$= (m+n)!\,/\,m!\,n!$$

$$\hat{M} = 3(1 + r + C)(N\hat{N}M)^2$$

定量的な Cauchy-Kowalewsky の定理は、次の様になる。

定理 7 (Cauchy-Kowalewsky) 初期値問題(3)-(4) の unique な正則解 $u_1(z), \cdots, u_N(z)$ は、次の領域で存在する。

$$\begin{cases} |z_1| < \dfrac{r}{4\hat{M}(N\hat{N}+1)n}, \\ |z_2| + \cdots + |z_n| < \dfrac{r}{4}. \end{cases}$$

証明の概略　まず $(\partial/\partial z)^\alpha u_j$ を $v_{j,\alpha}(z)$ とおいて、$\{v_{j,\alpha}\}_{j=1,\cdots,N,\ |\alpha|\leq m}$ を未知関数と考えて、方程式 (3) を、1階の quasi-linear system (2) の型にかき直す。未知関数の個数は、この時 $N\hat{N}$ になる。次に、$v_{j,\alpha}$ に適当な関数を加える事によって、初期条件(4) の $\varphi_{j,l}$ を、すべて 0 の場合（さらに $v_{j,\alpha}$ の初期条件もすべて）に帰着する。最後に、方程式を、z_1 に explicit に depend させなくする為に、未知関数 w_{N+1} を、次の式で導入する。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_{N+1}}{\partial z_1} = 1 \\ w_{N+1}(0, z') = 0 \end{cases} \qquad (\text{i.e. } w_{N+1} = z_1)$$

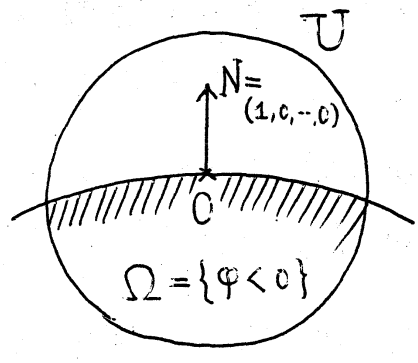
これにより、z_1 を w_{N+1} でおきかえた方程式が得られ、結局、初期値問題(3)-(4) は、補題5 で考えた初期値問題

に帰着された事になる。最終的な未知関数の個数は、$N\hat{N}+1$ になる。以上の reduction を、ていねいに follow して、補題5 の定数 M に相当するものを求めると、$\hat{M}$ をとれば十分であることがわかり、証明を終る。 q.e.d.

定理7で、最も重要な点は、もし C が有界ならば、解の存在範囲が、初期条件の収束半径 r に関して、1次の order になっている事で、これが、以降の解析接続定理で、本質的な役割をはたす。

Introduction 及び Part I と同様、U を原点の近傍、Ω をその subdomain

$$\Omega=\{z\in U \mid \varphi(z)<0\}$$



とする。適当な座標変換により、

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}_z\varphi(0)&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}(0),\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial z_n}(0)\right)\\&=(1,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

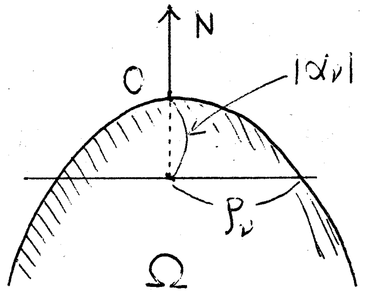
であるとしてよい。以後すべて、この座標系を fix して、話をすすめる。解析接続の為の key lemma は、Zerner による次のものである。

<u>補題 6</u> (Zerner [18]) 次の (i) ~ (iii) をみたすような点列 $\{\alpha_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots}$ ($\alpha_\nu < 0$, $\alpha_\nu \to 0$) と $\{\rho_\nu\}_{\nu=1,2,\cdots}$ ($\rho_\nu > 0$) が存在する。

(i) $(\alpha_\nu, 0, \cdots, 0) \in \Omega$

(ii) $\{z_1 = \alpha_\nu\} \cap \Omega \supset \{ z_1 = \alpha_\nu, \ |z_j| \leqq \rho_\nu \quad j=2,\cdots,n \}$

(iii) $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu / \rho_\nu = 0$



証明は、陰関数定理と、関数の order を測る事によって容易に導かれる。省略する。

<u>定 義</u> Ω で正則な関数 $u(z)$ で、$|(\partial/\partial z)^\alpha u(z)|$ が $|\alpha| \leqq m$ の時すべて有界になる時、$u(z)$ は Ω で、order m で有界であるという。

以上の準備の下で、まず m 階の quasi-linear な方程式系、ついで、全く一般の m 階 non-linear 方程式系に対する解析接続定理を述べる事にする。

未知関数を $u_1(z), \cdots, u_N(z)$ とする m 階 quasi-linear system を考える。

$$(5)\quad \sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=1}^{N} a_\alpha^{j,k}(z,\cdots,(\tfrac{\partial}{\partial z})^\beta u_l,\cdots)(\tfrac{\partial}{\partial z})^\alpha u_k = f_j$$

$$j=1,\cdots,N$$

但し、$a_\alpha^{j,k}$，f_j は、z 及び $p_{l,\beta}=(\partial/\partial z)^\beta u_l$，($l=1,\cdots,N$，$|\beta|\leq m-1$）に depend する関数であり、$z\in U$，($p$ については entire）で正則であるとする。方程式（5）に次の条件をおく。

<u>条件(A)</u>　任意の $z\in U$，$p_{l,\beta}\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\det\left(a_{(m,0,\cdots,0)}^{j,k}(z,p)\right)\neq 0$$

この条件(A)は、超平面 $\{z_1=\text{const.}\}$ が任意の Cauchy data（i.e. 任意の $p_{l,\beta}$）に対して、非特性的になるという事を意味している。この時、次の定理が成り立つ。

<u>定理 8</u>　条件(A)を仮定する。この時、方程式(5)の Ω で正則な解 $u_1(z),\cdots,u_N(z)$ で、order $m+1$ で有界なものは、原点の近傍で正則になる。

<u>証明</u>　条件(A)より、(5)は、$\partial^m u_j/\partial z_1^m$ につい

て、解く事ができる。(Cramer の公式) 即ち

(6) $$\frac{\partial^m u_j}{\partial z_1^m} = F_j\left(z, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha u_k, \cdots\right) \qquad j=1,\cdots,N$$

ここで、F_j は、z と $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha u_k$ ($|\alpha| \leqq m$, $\alpha_1 \leqq m-1$) に depend し、$z \in U$, $p_{k,\alpha}$ $\left(= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha u_k\right) \in \mathbb{C}$ 全体、で正則になっている。$\{\alpha_\nu\}$, $\{\rho_\nu\}$ を、補題6で得られた点列とし、解 $(u_1, \cdots, u_N)$ を、$\{z_1 = \alpha_\nu\}$ を初期平面とする(6)の Cauchy 問題の解であると考えて、定理7を適用する。$(u_1, \cdots, u_N)$ は、

$$|z_1 - \alpha_\nu| < \frac{\rho_\nu}{4\hat{M}_\nu(N\hat{N}+1)n}, \quad |z_2| + \cdots + |z_n| < \frac{\rho_\nu}{4}$$

で正則になる。ところが $(u_1, \cdots, u_N)$ が order $m+1$ で有界ならば、数列 $\{\hat{M}_\nu\}$ が有界になる。従って、ν に依存しない定数 $c > 0$ がとれて、$(u_1, \cdots, u_N)$ は、

$$|z_1 - \alpha_\nu| < c\rho_\nu \quad |z_2| + \cdots + |z_n| < \rho_\nu/4$$

で正則になる。そこで、

$$0 \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left\{ z \in U \;\middle|\; |z_1 - \alpha_\nu| < c\rho_\nu, \; |z_2| + \cdots + |z_n| < \frac{\rho_\nu}{4} \right\}$$

を示せばよい。もし成り立たないとすれば、任意の ν に対して、$|\alpha_\nu| \geqq c\rho_\nu$ となるから、これは補題6の条件(iii)に矛盾する。 q.e.d.

最後に、一般のm階 *non-linear system* について調べる。再び未知関数を$(u_1, \cdots, u_N)$とし、方程式は

$$(7) \qquad F_j\left(z, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} u_k, \cdots\right) = 0 \qquad j = 1, \cdots, N$$

但しF_jはz及び$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} u_k$ $(|\alpha| \leqq m,\ k = 1, \cdots, N)$に依存し、$z \in U$で($p_{k,\alpha}$については *entire*)正則であるとする。この時、(7)をz_1について微分すると、*order* $m+1$の *quasi-linear system* になる。従って、定理8を適用すれば、次の系を得る。

<u>条件(B)</u>　任意の$z \in U$, $p_{k,\alpha} \in \mathbb{C}$に対して、

$$\det\left(\frac{\partial F_j}{\partial p_{k,(m,0,\cdots,0)}}(z, p)\right) \neq 0$$

<u>定理8の系</u>　条件(B)を仮定する。この時、方程式(7)の、Ωで正則な解$u_1(z), \cdots, u_N(z)$で、*order* $m+2$で有界なものは、原点の近傍で正則になる。

<u>有界性の条件がおとせない例</u>

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} + u^2 = 0$$

上の方程式は、条件(A),(B)をみたすが、$u(z)=\dfrac{1}{z_1}$ を解にもっている。

§6. necessary condition for first order equations of two variables

この節の目的は、1階2変数の方程式で、前節の条件(B)をみたさない時、原点で接続できない様な解を構成する事である。変数を (z_1, z_2) ではなく、(x, y) と記す。未知関数を $u(x,y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x=p$, $\frac{\partial u}{\partial y}=u_y=q$ と記す。考える方程式は

$$(8)\qquad F(x, y, u, p, q)=0$$

とする。F は $U\times\mathbb{C}^3$ で正則であるとする。Ω の境界関数 $\varphi(x,y)$ は、前節同様 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(0)\right)=(1,0)$ であるとする。この時、条件(B)は、

$$\frac{\partial F}{\partial p}\overset{\text{def}}{=}F_p(x,y,u,p,q)\neq 0\quad\begin{cases}\forall(x,y)\in U\\ \forall(u,p,q)\in\mathbb{C}^3\end{cases}$$

であった。ここでは、ある u_0, p_0, q_0 で、

$$F_p(0, 0, u_0, p_0, q_0)=0$$

となる場合を考える。未知関数を

$$v(x,y) = u(x,y) - u_0 - p_0 x - q_0 y$$

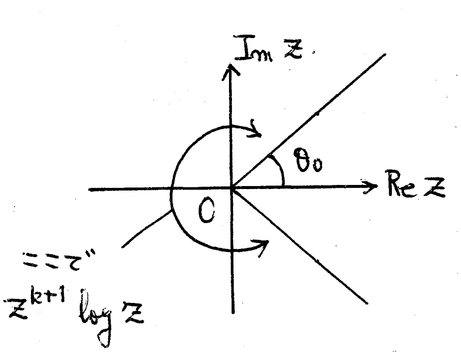
と変換する事により、一般に $u_0 = p_0 = q_0 = 0$ であるとしてよい。又、F の特性帯の (x,y) 空間への射影、即ち、F の特性曲線が退化しないように、$F_q(0,\cdots,0) \neq 0$ とする。特に $F_q(0,\cdots,0) = 1$ として一般性を失わない。この様な意味で、線型方程式の場合の、simple characteristic の場合を考えている事に相当する。(§2、定理3を参照)

F に関する仮定をまとめると、

$$F(0,\cdots,0) = 0 \;,\; F_p(0,\cdots,0) = 0 \;,\; F_q(0,\cdots,0) = 1$$

であり、以後すべてこれが成り立っているものとする。

<u>補 題 7</u>　θ_0 $(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$ を任意に fix する。この時、複素平面 $\mathbb{C}$ 上で C^k (k も任意に fix) function で、$|\arg z| > \theta_0$ では正則になり、$|\arg z| < \theta_0$ では正則でないような関数 $g(z)$ が存在する。



実際、例えば $|\arg z| > \theta_0$ で $g(z) = z^{k+1} \log z$ とし、残りの領域で、適当に support をおとして

やればよい。(偏角のみにdependする C^∞ functionをかけてやればよい。)

<u>補題 8</u>　$g(z)$ を補題7で得られるものとする。この時、$h(z)$ を未知関数として、$h(0)=0$ かつ,

$$F(z, 0, g(z), \frac{\partial g}{\partial z}, h(z)) = 0 ,$$

をみたす C^{k-1} function が 0 の近傍で unique に存在し、$h(z)$ は、$g(z)$ が正則の所では、正則になる。

証明は、実2変数の陰関数定理と、正則関数 Category での陰関数定理を組み合わせればよい。省略する。

さて、以上の準備の下で、特異点を持つ解の構成に関して、次の定理が得られる。

<u>定理 9</u>　$(x_0(t), y_0(t), u_0(t), p_0(t), q_0(t))$ を、$t=0$ で $(0, \cdots, 0)$ を通る(8)の特性帯とすると、この特性曲線 $(x_0(t), y_0(t))$ のあらゆる方向に関する $\partial\Omega$ の法曲率が正になる時、0 に特異点をもつ(8)の、Ω での正則な解が存在する。

定理9の仮定を、よりはっきりと述べれば、次の条件(C)になる。

<u>条件(C)</u>　任意の $t_0 \neq 0$ $(t_0 \in \mathbb{C})$ に対して、τ を real parameter として、

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\varphi(x_0(\tau t_0), y_0(\tau t_0))\Big|_{\tau=0} > 0 .$$

<u>定理9の証明の概略</u>　条件 $F_q(0,\cdots,0) \neq 0$ より、方程式(8)は超平面 $\{y=0\}$ (i.e. x-plane) に関しては、小さい Cauchy data に対しては、非特性的になる。そこで、x-平面上 $(y=0)$ に、補題7で得られた $g(x)$ を Cauchy data として与え、この初期値問題を解く。方程式(8)に付随する特性微分方程式はよく知られているように、次の通りである。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_p \quad \dfrac{dy}{dt} = F_q \quad \dfrac{du}{dt} = pF_p + qF_q \\ \dfrac{dp}{dt} = -F_x - pF_u \quad \dfrac{dq}{dt} = -F_y - qF_u \end{cases}$$

上述の初期値問題を解くには、この特性微分方程式の $t=0$ での初期値として、次の値をとる様な解を求めればよい。

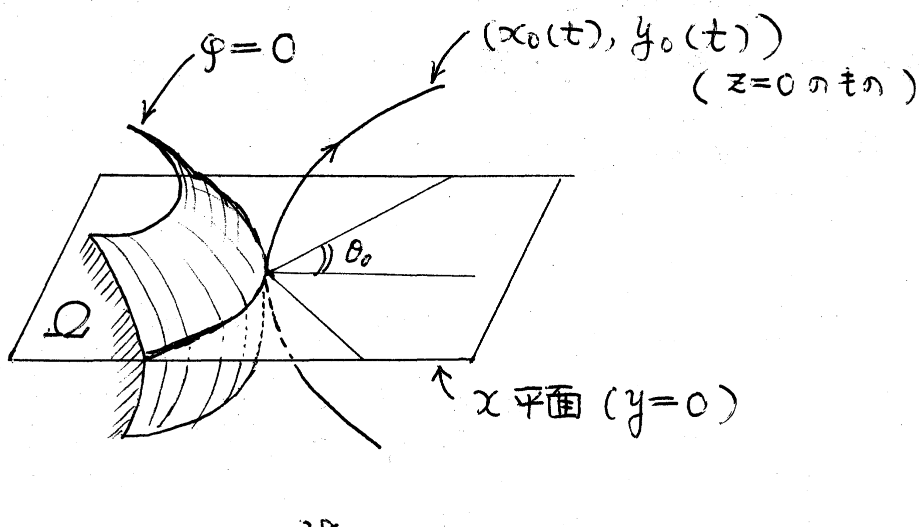
$$\begin{cases} x(0) = z \quad y(0) = 0 \quad u(0) = g(z) \\ p(0) = \frac{\partial g}{\partial z}(z) \ , \quad q(0) = h(z) \end{cases}$$

但し、$h(z)$ は補題8で得られた関数である。求める解 $u(x,y)$ は、上の特性方程式の解 $x(t,z)$, $y(t,z)$ (z を parameter として初期条件に含むから) から逆に t 及び z を (x,y) の関数として解き (逆関数定理) それらを特性方程式の解の $u(t,z)$ に代入する事によって得られる。従って、証明の key point は、

(I) real variables の Category で、上の逆関数定理が成り立つ事。

(II) (I) で得られた $t(x,y)$, $z(x,y)$ が Ω では正則になる事。

以上の2点である。 この (II) を保障するものが、定理の仮定、条件(C) である。



即ち、$g(z)$ が正則でない所から（$x(0)=z$, $y(0)=0$）出発する特性曲線が、Ω と交らないようにできればよく、$g(z)$ が正則でない所は cone であるから、特にその頂点を通る特性曲線（$x_0(t)$, $y_0(t)$）が Ω と交らなければよい。これが条件（C）である。 q.e.d

注意 1　上の証明より、任意に l を fix した時、(8) の Ω での正則な解 $u(x,y)$ で、Ω 上 order l で有界でかつ原点で singular になるものが存在する事がわかる。

注意 2　§2、定理3の条件(II)に相当するものが不要なのは、初期条件 $g(z)$ の正則でない所が、原点を頂点とする cone でとれたからである。定理3では、特異点のつくる variety を、Levi 多項式を初期値とする陪特性方程式の解として解いたのであるが、Levi-多項式の零点は、原点で $\partial\Omega$ に接しているので、grad φ に関する条件(II)が必要になった。

注意 3　complex vector (λ_1, λ_2) で grad $\varphi(0)$ と直交するもの（i.e. $\lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$）は、

grad $\varphi(0) = (1, 0)$ であるから、$\lambda_1 = 0$ となる。従って
このような (λ_1, λ_2) に対する φ の complex Hessian
は、 $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \bar{y}}(0)\, \lambda_2 \overline{\lambda_2}$ となるが、条件(C)より、

これの値は $\lambda_2 \neq 0$ の時つねに正になる。即ち、Ω
は原点で strictly pseudo-convex になっている。

以上
(1976. 1月)

References

[1] M.S. Baouendi and C. Goulaouic, Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), 455–475.

[2] G. Bengel, Sur le prolongement analytique des solutions d'une équation aux dérivées partielles C. R. Acad. Sci. Paris, 273 (1971) 572–574.

[3] J.-M. Bony et P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équation aux dérivées partielles, Inventiones

math. 17 (1972), 95–105.

[4] Y. Hamada, The singularities of the solutions of the Cauchy problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 5 (1969), 21–40.

[5] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer-Verlag, 1963.

[6] F. John, Partial differential equations, Appl. Math. Sci. 1, Springer-Verlag, 1971.

[7] C. O. Kiselman, Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles a coefficients constants, Bull. Soc. Math. France 97 (1969), 329–356.

[8] J. J. Kohn and L. Nirenberg, A pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function, Math. Ann. 201 (1973) 265–268.

[9] J. Leray, Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy (Problème de Cauchy I), Bull. Soc. Math. France 85 (1957) 380–429.

[10] P. Pallu de La Barrière, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sci. Paris 279 (1974), 947 – 949.

[11] F. Treves, Linear partial differential equation with constant coefficients, Gordon and Breach, 1966.

[12] Y. Tsuno, On the prolongation of local holomorphic solutions of partial differential equations, J. Math. Soc. Japan 26 (1974) 523 – 548.

[13] ———, On the prolongation ····, II, over the pluri-harmonic hypersurface, J. Math. Soc. Japan (submitted).

[14] ———, On the prolongation ····, III equations of the Fuchsian type, J. Math. Soc. Japan (submitted).

[15] ———, On the prolongation of local holomorphic solutions of nonlinear partial differential equations, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 454 – 466. Its summary

is published in Proc. Japan Acad. 50 (1974), 702 – 705.

[16] C. Wagschal, Problème de Cauchy analytique, a données méromorphes, J. Math. Pures Appl. 51 (1972), 375 – 397.

[17] E. C. Zachmanoglou, Uniqueness of the Cauchy problem for linear partial differential equations with variable coefficients, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 517 – 526.

[18] M. Zerner, Domaines d'holomorphie des fonctions verifiant une équation aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sci. Paris 272 (1971) 1646 – 1648.