数理解析研究所講究録
283巻 1976年 52-57

2次元K(π, 1)について

東大 理　大川哲介

2次元K(π, 1)に関する未解決問題の一つに，Whitehead の問題[4]：

<u>Problem</u>　2次元K(π, 1) complex の subcomplex は やはりK(π, 1)であるか？

（注．complex は CW complex の意味にとる）

がある．2次元complex Kに対し，これがK(π, 1)となるための必要十分条件は，$\pi_2(K)=0$ なることであるから，易しそうに見えるが，簡単にはいかない．難しさの原因として，

i)　$\pi_i(K)$ $(i=1, 2)$ は（直観的な意味で）計算不能である．

ii)　$\pi_i(K)$ $(i=1, 2)$ の良い filtration が知られていない．

iii)　Kが有限であっても，$\pi_2(K)$ は $\pi_1(K)$ 上の module として，一般に有限生成でない（Stallings [3]）．

等がある．御利益の一例として

- $K = S^{n+2} - S^n \vee S^n \vee \cdots\cdots \vee S^n$　とするとき，

Kが2次元 complex にホモトピー同値ならば，（特に

$K = S^3 - S^1$ (knotted) ならば），$K = K(\pi, 1)$ である．

が直接の系として出る．部分的解決については Adams [3]，

還元定理については，Papakyriakopoulos [2] を見よ．

ここでは Whitehead の問題の対偶命題の部分的解決とな

っている次の定理の略証を与えることを目的とする．

定理. Kを closed 3-mfd. M の 2-skeleton とし，Kは

また，2次元 $K(\pi, 1)$ complex L の subcomplex にも

なっているとする．このとき $H_*(M) \cong H_*(S^3)$.

（但し，2-skeleton の意味として，M を 0-cell 及び 3-cell

が1個宛になるように PLCW 分割の 2-skeleton の意味

にとる．したとき）

この定理の意味として，例えば M を lens space に取ると，

$K \subset L$，$\pi_2(L) = 0$，$\dim L \leqq 2$ の仮定のもとに，$\pi_1(K)$

は見かけの torsion を含まぬことが分る．

Key lemma. M を closed 3-mfd; K を M の勝手な

PLCW割分（tame なCW分割の意）の 2-skeleton,

L は K を含む 2-dim CW complex, $i : K \hookrightarrow L$ は inclusion

とする．このとき $i_* : \pi_2(K) \to \pi_2(L)$ が zero map.

ならば $i_* : \pi_1(K) \longrightarrow \pi_1(L)$ も zero map. となる．

証明.

① Hurewicz 写像 $\Xi: \pi_2(K) \to H_2(K)$ は，零写像として良い．右図に於いて $f = i_*$ は零写像で，$g = i_*$ は単射だから．

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(K) & \xrightarrow{f} & \pi_2(L) \\ \Xi \downarrow & & \downarrow \Xi \\ H_2(K) & \xrightarrow{g} & H_2(L) \end{array}$$

② K は M を 0-cell, 3-cell が 1 個宛になる様な PL CW 分割の 2-skeleton として良い．3-cell が 2 個以上あるとその attaching map. の Hurewicz image が $\neq 0$ となり，① に反する．0-cell が 2 個以上あれば，1-cell をつぶして行けば良い．以下この意味の K を $K = (M)^2$ と記す．

③ $(M_1 \# M_2)^2 = (M_1)^2 \vee (M_2)^2$

但し M_i $(i=1, 2)$ は closed 3-mfd's，# は connected sum

④ M : prime として良い（∵ ③），$M \neq S^1 \times S^2$ として良い（∵ $(S^1 \times S^2)^2 = S^1 \vee S^2$, and ①）

⑤ $K \ni *$ に於ける（local な意味での）link は連結として良い．（∵ Kneser conjecture, ①） 但し $* = K$ の 0-cell

⑥ K の M に於ける正則近傍を N, $f: N \to K$ を retraction $g: S^2 \xrightarrow{\approx} \partial N$ を homeo, P を S^2 の cell 分割で $f \circ g$ が P の各 cell 上で homeo を導く様な celluler map. となる様なものとし，$\alpha = [f \circ g] \in \pi_2(K)$ とする．$\tilde{L}$ を L の univ. covering space，$h: S^2 \to \tilde{L}$ を，次の図式が可換

となるような celluler map,

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f\circ g"'] & \tilde{L} \arrow[d, "\pi"] \\ K \arrow[r, hook, "i"'] & L \end{tikzcd}$$

$\beta = [h] \in \pi_2(\tilde{L}) = H_2(\tilde{L}) = Z_2(\tilde{L})$

$Z_2(\tilde{L})$ は CW complex としての 2-cycle の群. このとき仮定により, $\beta = 0$ となる.

⑦ P ($|P| = S^2$) の 0-cell a_i ($i=1,2$) が共役であるとは, P の $\exists$ 2-cell $p_i : D^2 \to S^2$ と $\exists\, a_0 \in \partial D^2$ で ($i=1,2$) $f\circ g\circ p_1 = f\circ g\circ p_2$, $a_i = p_i(a_0)$ ($i=1,2$) なるものが存在するときに云う. a_1, a_2 を結ぶ S^2 の path l を $f\circ g$ によりK上へ落としたものを $\bar{l} : S^1 \to K$ とすると, $[\bar{l}] = 1 \in \pi_1(L)$ となる. ($\because$) $h\circ p_1(D^2)$ を $h\circ p_2(D^2)$ へ写す covering transf. が $[\bar{l}]$ だから $[\bar{l}] \neq 1$ とすると, $\beta \neq 0 \in Z_2(\tilde{L})$ となり矛盾.

⑧ P の任意の2つの 0-cell a, b に対し, P の 0-cell $a_0, a_1 \cdots a_n$ で, $a_0 = a$, $a_n = b$, a_{i-1} と a_i は共役 ($i=1,2,\cdots n$) なるものが存在する ($\because$ ⑤)

⑨ P の任意の2つの 0-cell a, b に対し, a と b を結ぶ S^2 上の path を l, $\bar{l} = f\circ g\circ l : S^1 \to K$ とすると $[\bar{l}] = 1 \in \pi_1(L)$ ($\because$ ⑧)

⑩ Kの任意の 1 − cell は P のある 1 − cell から homeo で写って来ている.

⑪ $i_*: \pi_1(K) \to \pi_1(L)$ は零写像 (∵ ⑨ ⑩) q.e.d

<u>定理の証.</u> 定理の仮定の下に下図の ∂ は同型である.

$$\pi_1(L) \underset{0}{\leftarrow} \pi_1(K) \xleftarrow{\partial} \pi_2(L, K) \longleftarrow \pi_2(L) = 0$$

(∵ lemma)

K の各 1 − cell a に対し, $\partial^{-1}[a] \in \pi_2(L, K)$ を cellular map. $f_a: (D^2, S^1) \to (L, K)$ で実現し, f_a は各 2 − cell 及び S^1 上で homeo を導くものとする. すると f_a は $C_2(L) = C_2(K) \oplus C_2(L-K)$ の元を表わすと考えられ, そのうちの $C_2(K)$-成分を $\mathfrak{f}_a$ で表わし, $\mathfrak{f}: C_1(K) \to C_2(K)$ を $\mathfrak{f}(a) = \mathfrak{f}_a$ で定義する. また K の各 2 − cell $\alpha: (D^2, S^1) \to (L, K)$ に対し, S^1 の cone $C(S^1)$ 上の値を, 各 1 − cell $a \subset S^1$ の cone 上での値を f_a で与えて拡張すれば, α は $\bar{\alpha}: S^2 \to L$ へ拡張される. $\pi_2(L) = 0$ より, $\Phi([\bar{\alpha}]) = 0 \in H_2(L)$. $\bar{\alpha}$ はその作り方より $\bar{\alpha} = (\mathfrak{f} \circ \partial + id)\alpha = 0$ $(\partial: C_2(K) \to C_1(K),\ id: C_2(K) \to C_2(K))$

∴ $\mathfrak{f} \circ \partial = -id$, これは $\partial: C_2(K) \to C_1(K)$ が split することを示し, 任意の Abel 群 A に対し, $H_2(K, A) = 0$

ところで $H_2(M, A) = H_2(K, A) = 0$ だから M は orientable, $H_1(M)$ は torsionfree, $b_2(M) = 0$ となり, $H_*(M) = H_*(S^3)$ が導びかれる. q. e. d

参 考 文 献

[1] J. F. Adams, A new proof of a theorem of W. H. Cockcroft J. London Math. Soc. 30 (1955)

[2] C. D. Papakyriakopoulos, Attaching 2-cells to a complex. Ann. of Math. 78 (1963)

[3] J. R. Stallings, A finitly presented group whose 3-dimensional integral homology group is not finitly generated, Am. J. Math. 85 (1963)

[4] J. H. C. Whitehead, On adding relation to homotopy groups Ann. of Math. 42 (1941)