

組み合わせ Pontryagin 類

Gabrièlov, Gelfand, Losik ; "Combinatorial calculation of characteristic classes" ; Funct anal. and appl. '75 の紹介

東大 理 大学院 土屋信雄

§1. 定理の Statement

1.1 Abel-Rogers の函数 (cf. Coxeter, "The function of Schläfli and Lobatschewsky", Quant. J. Math. 6 (1935) 13-29)

定義 C^∞ -函数 $\Phi: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ を次式で定義する。

$$\Phi'(x) = \log|x|/x-1 - \log|x-1|/x, \quad \Phi(-1) = \Phi(\frac{1}{2}) = \Phi(2) = 0.$$

1.2 $X^4 = \cup X_i^{4-p}$ を, 滑らかな境界のない向きづけられた, コンパクト 4次元多様体の滑らかな三角形分割とする。(4-p)次元単体 X_i^{4-p} に対して S_i^{p-1} をそのまわり複体とする。 S_i^{p-1} には, X_i^{4-p} の向きと, X の向きとから決まる向きを入れておく。 D_i^p を p 次元球体の単体分割で, その境界は S_i^{p-1} であり, 内部には頂点を持たないものとする。今 $X_i^{4-p} \subset X_j^{4-p+1}$ のとき, X_j^{4-p+1} に対応する S_i^{p-1} の頂点を v_j と書く。 $B_{ij}^p = \text{Star}(v_j, D_i^p)$ とする。

/

$\partial B_j^p = \text{Star}(v_j, S_i^{p-1}) \cup \text{Link}(v_j, D_i^p)$ である。 ∂B_j^p において、 $\text{Star}(v_j, S_i^{p-1})$ を D_j^{p-1} に張り替えて得られる、 $(p-1)$ 次元球面の semi-simplicial な分割を S_j^{p-1} とする。 D_j^p を p 次元球体の semi-simplicial な分割で、境界は S_j^{p-1} であり、内部に頂点を持たないものとする。 D_j^p には D_j^{p-1} の向きから決まる向きを入れておく。

1.3. 法ベクトル $X_i^{4p} < X_j^{4p+1} = X_i^{4p} * v_j$ のとき、 X_i^{4p} 上のベクトル場 m_{ij} を、 $m_{ij}(x) = \overrightarrow{xv_j}$ で定義して、 X_i^{4p} の X_j^{4p+1} 内の法ベクトルと呼ぶ。

1.4. General position の仮定 $X_j^1 < X_{k_1}^2, X_{k_2}^2, X_{k_3}^2$ とするとき、各点 $x \in X_j^1$ で、 $m_{jk_v}(x)$; $v=1,2,3$ は独立であるとする。

1.5. $X^4 = \cup X_i^{4p}$, $X_j^1 < X_k^2$ に対し D_{jk}^3 の非退化3単体 Δ_μ を考える。 $\alpha_1, \dots, \alpha_4 \in \Delta_\mu$ の頂点とする。 α_i は X_j^1 を含む2単体 $X_{\alpha_i}^2$ の index である。 $\Delta_\mu = \Delta^3(\alpha_1, \dots, \alpha_4)$ (向きもこめて) であるとき $\chi(\Delta_\mu)_{(x)} = bC/ad_{(x)}$ ここに $m_{j\alpha_1}(x) = a(x)m_{j\alpha_3}(x) + b(x)m_{j\alpha_4}(x)$, $m_{j\alpha_2}(x) = c(x)m_{j\alpha_3}(x) + d(x)m_{j\alpha_4}(x)$, mod $TX_k(x)$ in $TX(x)$ とする。

1.6. 定理 I $(p_i(x), X)$ を X の Pontryagin 数とするととき、

$$(p_i(x), X) = \sum_{i: X_i^0} \sum_{j: X_j^1 > X_i^0} \sum_{k: X_k^2 > X_j^1} \sum_{\Delta_\mu \in D_{jk}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \frac{1}{8\pi^2} \Phi(\chi(\Delta_\mu)(X_i^0))$$

ここに ε_{ij} は X_i^0 と X_j^1 の結合係数をあらわす。

1.6. Gelfandらは、構成法を工夫することによつて、1.5.の式が、ある仮定の下に、純粹に組み合わせ的に表現できることを示した。

§2 単体的 de Rham 複体と Chern-Weil 準同型

$X^n = \bigcup X_i^{n,p}$ を滑らかな多様体の滑らかな三角形分割とする。以下 X , $X_i^{n,p}$ 等はその意味で用いる。

注意 繁雑さをさけるため、次元にのみ関係する符号を省略したところがある。

2.1. 単体的 de-Rham 複体

定義 $C^{p,q} = \sum_{i: X_i^{n,p}} \Omega^q(X_i^{n,p})$, $d: C^{p,q} \rightarrow C^{p,q+1}$ を外微分,
 $\delta: C^{p,q} \rightarrow C^{p+1,q}$, $\varepsilon \delta\{\varphi_i\} = \{\psi_i\}$, $\psi_i \in \Omega^q(X_i^{n,p-1})$, $\psi_i =$
 $= \sum_{j: X_j^{n,p} \supset X_i^{n,p-1}} \varepsilon_{ij} \varphi_j$ で定義する。

二重複体 $\{C^{p,q}; d, \delta\}$ を単体的 de-Rham 複体, $C^{p,q}$ の元を (p,q) -鎖 と呼ぶことにする。

Z^r を分割 $\bigcup X_i^{n,p}$ に横断的な、区分的に滑らかな X の chain とするとき, $\{\varphi_i\} \in \bigoplus_{p+q=r} C^{p,q}$ に対して, 積分 $(\{\varphi_i\}, Z) = \sum_p \sum_{i: X_i^{n,p}} \int_{Z \cap X_i} \varphi_i$ が、自然に定義できる。

de Rham の定理 積分による pairing により, 次の同型

が成立する。

$$H^*(\bigoplus_{p+q=r} C^{p,q}; d_{\pm}) \cong H^*(X; \mathbb{R}).$$

2.2. difference cochain; $E \rightarrow M$ を滑らかな \mathbb{R}^m -bundle,
 $\omega_0, \dots, \omega_\ell \in E$ の接続とする。 Δ^ℓ を標準 ℓ 単体として, $\tilde{\omega}_{0, \dots, \ell}$
 $\in E \times \Delta^\ell \rightarrow M \times \Delta^\ell$ の接続, $\tilde{\omega}_{0, \dots, \ell} = t_0 \omega_0 + \dots + t_\ell \omega_\ell$, $\tilde{R}_{0, \dots, \ell}$
 \in その曲率とする。 $P: \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \times \dots \times \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を次数 k
 の不変多項式とする。

定義 次式で定義される M 上の $(2k-\ell)$ -次微分形式 $P_E^{l, 2k-\ell}(\omega_0, \dots, \omega_\ell)$
 \in , 不変多項式 P と, 接続 $\omega_0, \dots, \omega_\ell$ に対応した difference cochain
 と呼ぶ。

$$P_E^{l, 2k-\ell}(\omega_0, \dots, \omega_\ell) = \int_{\Delta^\ell} P(\tilde{R}_{0, \dots, \ell}, \dots, \tilde{R}_{0, \dots, \ell})$$

こゝに $\int_{\Delta^\ell} : \Omega^q(M \times \Delta^\ell) \rightarrow \Omega^{q-\ell}(M)$ は fibre integration.

例 ① $P_E^{0, 2k}(\omega_0)$ は, 接続 ω_0 と, 不変多項式 P に対応
 した特性微分形式である。

② $l > k$ のとき, $P_E^{l, 2k-\ell}(\omega_0, \dots, \omega_\ell) = 0$ である。

補題 (coboundary formula)

$$d P_E^{l, 2k-\ell}(\omega_0, \dots, \omega_\ell) = \sum_m (-1)^m P_E^{l-1, 2k-\ell+1}(\omega_0, \dots, \hat{\omega}_m, \dots, \omega_\ell).$$

例 $l=1$ のとき, $dP_E^{1,2k-1}(\omega_0, \omega_1) = P_E^{0,2k}(\omega_1) - P_E^{0,2k}(\omega_0)$ は, 2つの接続 ω_0, ω_1 に対応する特性形式の差が exact であることを示す。

2.3. 許容単体系. $X_i^{n,p}$ に対して $C(i) = \{l: X_e^m \rightarrow X_i^{n,p}\}$, $\Delta(C(i))$ を $C(i)$ の元を頂点とする抽象単体, $J_*(i)$ をその鏡複体とする。 $X_j^{n,p+1} \rightarrow X_i^{n,p}$ のとき自然に $J_*(j) \subset J_*(i)$ とみなせる。

定義 許容単体系とは $X_i^{n,p}$ に対して $D_i \in J_p(i)$ を対応させる対応で, 次の i) ii) を満たすものとする。

(i) X_e^m に対し, $D_e = \Delta^0(l)$.

(ii) $X_i^{n,p}$ に対し ($p > 1$), $\partial D_i = \sum_{j: X_j^{n,p+1} \rightarrow X_i^{n,p}} \varepsilon_{ij} D_j$.

2.4. piecewise connection と Chern-Weil chain

定義 $X = \cup X_i^{n,p}$ 上の piecewise connection とは, X の各 n 単体 X_e^m 上の TX_e^m の接続 ω_e の集合 $\{\omega_e\}$ のことである。

piecewise connection $\{\omega_e\}$ が与えられているとき, $J_p(i) \rightarrow \Delta^p(l_0, \dots, l_p)$ と, 不変多項式 P に対して, $P_{TX|X_i}^{p, 2k-p}(\Delta^p(l_0, \dots, l_p), \{\omega_e\}) = P_{TX|X_i}^{p, 2k-p}(\omega_{e_0}, \dots, \omega_{e_p}) \in \Omega^{2k-p}(X_i)$ とする。 また $J_p(i) \ni D_i = \sum_{\lambda} C_{\lambda} \Delta_{\lambda}$ に対して, $P_{TX|X_i}^{p, 2k-p}(D_i, \{\omega_e\}) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} P_{TX|X_i}^{p, 2k-p}(\Delta_{\lambda}, \{\omega_e\})$ とする。

difference cochain の coboundary formula と, 許容単体系の性質とから次の命題が証明できる。

命題 P を次数 k の不変多項式, $\{W_\varepsilon\}$ を $X^m = \cup X_i^{m-p}$ の piecewise connection とする. $\{D_i\}$ を許容単体系とする. このとき,

$$\sum_p \sum_{i \in X_i^{m-p}} P_{TX_i^{m-p}}^{p, 2k-p}(D_i, \{W_\varepsilon\}) \in \bigoplus_{p+q=2k} C^{p,q}$$

は $(d \pm \delta)$ -closed であり, その $(d \pm \delta)$ -cohomology 類は, $\{D_i\}$ $\{W_\varepsilon\}$ のとり方によらない。

とくに, $\{W_\varepsilon\}$ として global な connection をとれば, $P^{p, 2k-p} = 0$ ($p > 0$), $P^{0, 2k}$ は普通の特異形式であるから次の系が成り立つ。

系 2.1. の de Rham の定理の同型により, $\sum_p \sum_i P_{TX_i^{m-p}}^{p, 2k-p}(D_i, \{W_\varepsilon\})$ のあらわす cohomology 類は不変多項式 P に対応した特性類である。

2.5. 以下では $P: \mathfrak{gl}(m) \times \mathfrak{gl}(m) \rightarrow \mathbb{R}$, $P(X, Y) = \text{tr}(XY) + \text{tr}X \cdot \text{tr}Y$ を考える。 $-\frac{1}{8\pi^2} P$ に対応する特性類が first Pontryagin 類であることが知られている。

定義 $X = \cup X_i^{m-p}$ の PD-connection とは次のような特殊な piecewise connection である: n 単体 X_e^m に対して, x_0, \dots, x_m をその重心座標とする。 W_e は TX_e^m の枠 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ を水平枠とする flat connection である。

補題 PD-connection $\{\omega_e\}$ に対して, $p \neq 2$ のとき, $P_{TX/X_i}^{p, p-p} (D_i, \{\omega_e\}) = 0$ である。i.e. この場合 $p_1(X)$ は homogeneous な, (2,2)-chain $\sum_{k: X_k^{n-2}} P_{TX/X_k}^{2,2} (D_k, \{\omega_e\})$ であるからわかる。

2.6. この § の言葉を用いれば, 定理 I (1.6.) は次の定理 I' の特殊な場合 ($n=4$) として従うことがわかる。

定理 I' $X = \cup X_i^{n-p}$ の (3.1)-chain

$$\sum_{j: X_j^{n-p} \rightarrow X} \sum_{k: X_k^{n-2} \rightarrow X_j^{n-p}} \sum_{\Delta_n \in D_{j,k}^2} \frac{1}{8\pi^2} \varepsilon_{j,k} d\Phi(X(\Delta_n))$$

は単体的 de Rham 複体の中で, first Pontrjagin class を表わす cycle である。

§ 2.6, (2.2)-chain $P_{TX/X_n}^{2,2} (D_k, \{\omega_e\})$, ($\{\omega_e\}$ は PD-connection) を計算することにより, それが定理 I' の (3.1)-chain $\sum_j \sum_k \sum_{\Delta_n} \varepsilon_{j,k} d\Phi(X(\Delta_n))$ と, $(d \pm \delta)$ -cohomologous であることを見よう。

§ 3 $X^n = \cup X_i^{n-p}$ を滑らかな三角分割, $P: gl(n; \mathbb{R}) \times gl(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$; $P(X, Y) = \text{tr}(XY) + \text{tr} X \cdot \text{tr} Y$ とする。

3.1. 補題 $\{\omega_e\}$ を PD-connection とする。 X_k^{n-2} について,

$$P_{TX/X_k}^{2,2} (\omega_{e_0}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = P_{E_k}^{2,2} (\omega'_{e_0}, \omega'_{e_1}, \omega'_{e_2}).$$

こゝに, $lv \in C(k)$, $E_k = TX/X_k / TX_k$ と, ω'_{lv} は ω_{lv} が

E_k に induce する接続.

3.2. $P^{2,2}$ の計算: 一般に $E \rightarrow M$ を \mathbb{R}^2 -bundle, m_0, \dots, m_N をその section で, 一般の位置にあるものとする. $\langle m_{j_0}, m_{j_1} \rangle$ を E の枠 (m_{j_0}, m_{j_1}) を水平枠とする接続をあらわす.

補題

$$\begin{pmatrix} m_{j_1} \\ m_{j_1'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} m_{j_0} \\ m_{j_0'} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_{j_2} \\ m_{j_2'} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} m_{j_0} \\ m_{j_0'} \end{pmatrix}, \quad A, B: M \rightarrow GL(2; \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \text{とするとき, } P_E^{2,2}(\langle m_{j_0}, m_{j_0'} \rangle, \langle m_{j_1}, m_{j_1'} \rangle, \langle m_{j_2}, m_{j_2'} \rangle) &= \text{tr}(A^t dA \wedge B^t dB) + \\ &+ (\text{tr} A^t dA) \wedge (\text{tr} B^t dB). \end{aligned}$$

系

$$(1) P_E^{2,2}(\langle m_0, m_3 \rangle, \langle m_1, m_3 \rangle, \langle m_2, m_3 \rangle) = 0.$$

$$(2) P_E^{2,2}(\langle m_1, m_2 \rangle, \langle m_0, m_2 \rangle, \langle m_0, m_1 \rangle) = 2 d \log |a| \wedge d \log |b|$$

$$\text{ここへ } m_0 = a m_1 + b m_2; \quad a, b: M \rightarrow \mathbb{R}.$$

3.3. 3.1. と 3.2. とを用いて, $P_{TX|X_k}^{2,2}(D_k, \{w_k\})$ を exact form としてあらわすためには, PD-connection $\{w_k\}$ と, 許容単体系 D_k を "解体" する必要がある. そのための記号の準備をする.

X_k^{n-2} に対して $S(k) = \{\ell; X_\ell^{n-1} \supset X_k^{n-2}\}$ とする. $S(k) \ni \ell$ に

対して $m_{k\ell} \in \Gamma(TX|X_k)$ を X_k の X_ℓ 内での法ベクトル (1.4.) とする.

$S^2(k) = \{(\ell_0, \ell_1); \ell_0, \ell_1 \in S(k), \ell_0 \neq \ell_1\}$ とする. $\hat{J}_*(k)$ を $S^2(k)$ の張る

抽象単体の複体とする. $C(k) \rightarrow S^2(k); \alpha \mapsto (\ell_{\alpha+}, \ell_{\alpha-})$,

$X_\alpha^m \supset X_{\ell_{\alpha+}}^{m-1} \supset X_k^{m-2} \supset X_{\ell_{\alpha-}}^{m-1}$ により $J_*(k) \subset \hat{J}_*(k)$ とみなす. (c.f. 2.3.)

$\hat{J}_2(k) \ni \Delta^2((\ell_0, \ell'_0), (\ell_1, \ell'_1), (\ell_2, \ell'_2))$ に対して, $P_{F_k}^{2,2}(\Delta^2) =$

$= P_{E_k}^{2,2} (\langle m_{kl_0}, m_{kl_1} \rangle, \langle m_{kl_1}, m_{kl_2} \rangle, \langle m_{kl_2}, m_{kl_3} \rangle)$ とする。(3.2, 参照,

ここでは自然な射影により $m_{kl_i} \in \Gamma(E_k)$ とみなした。)

この定義は $D_k \in J_2(k)$ と PD-connection $\{W_k\}$ についての, $P_{TX|X}^{2,2}$ ($D_k, \{W_k\}$) と compatible であることに注意する。

定義 ① $\hat{I}_2(k)$ を $\Delta^2((l_1, l_2), (l_0, l_2), (l_0, l_1))$ の形の 2-simplex で張られる $\hat{J}_2(k)$ の部分群とする。 $\Delta^2((l_1, l_2), (l_0, l_2), (l_1, l_2))$ を $\Delta^{0,1}(l_0, l_1, l_2)$ と書くことにする。

② $\hat{I}'_2(k)$ を $\Delta^2((l_0, l_3), (l_1, l_3), (l_2, l_3))$ の形の 2-simplex で張られる $\hat{J}_2(k)$ の部分群とする。

3.2. により, $c \in \hat{I}_2(k)$ に対して $P_{E_k}^{2,2}(c)$ は, exact form として canonical にあらわされ, $c' \in \hat{I}'_2(k)$ に対しては $P_{E_k}^{2,2}(c') = 0$ であることに注意する。

3.4. X_k^{m-2} の link S_k^1 の $D^2 \wedge$ の族を D_k^2 とする。(1.2.1).

補題 1. $b_k = \sum_{D_k^2 \rightarrow \Delta_k^2 = \Delta^2(l_0, l_1, l_2)} \Delta^{0,1}(l_0, l_1, l_2) \in \hat{I}_2(k) \subset \hat{J}_2(k)$ とする。

$D_k \in X_k^{m-2}$ に対応する許容単体系の元とするとき, $\hat{J}_1(k)$ 内で,

$$\partial D_k = \partial b_k \pmod{\partial \hat{I}'_2(k)} .$$

(証明) S_k^1 の頂点の数に関する帰納法による。

補題 2. $P_{E_k}^{2,2}(D_k, \{w_{e3}\}) = P_{E_k}^{2,2}(b_k).$

(証明) 補題 1 と, difference cochain の性質 $P^{3,1} = 0$, および, 3.2. の系から従う。

定義 $\Delta^{0,1}(l_0, l_1, l_2) \in \hat{I}_2(k)$ に対し, $S(\Delta^{0,1}(l_0, l_1, l_2)) = \log|a| d\log|b| - \log|b| d\log|a|$, $\therefore \therefore m_{kl_0} = a m_{kl_1} + b m_{kl_2}$ とする。

3.2. 系 (i) および補題 2 から,

補題 3 $P_{E_k}^{2,2}(b_k) = dS(b_k).$

補題 3 から (3.1)-chain $\delta \left\{ \sum_{k \in X_n^{n-2}} S(b_k) \right\}$ は, $\{P_{E_k}^{2,2}(D_k, \{w_{e3}\})\}$ と $(d \pm \delta)$ -homologous である。 $\delta \left\{ S(b_k) \right\} = \sum_j \sum_k \sum_m \varepsilon_{j k m} d\Phi(\chi(\Delta_m))$ であること (2.6. 定理 I') を見る。

3.5. 定義 X_j^{n-3} に対し, $S(j) = \{k: X_k^{n-2} \supset X_j^{n-3}\}$, $k \in S(j)$ に対し $m_{jk} \in \Gamma(TX|_{X_j})$ を X_j の X_k 内での法ベクトルとする。記号 $\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2; k_3)$, $k_\mu \in S(j)$, $k_\mu \neq k_\nu$ に対し, X_j 上の 1-form $S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2; k_3))$ を次式で定義する。

$$S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2; k_3))(x) = \log|a| d\log|b| - \log|b| d\log|a|.$$

$$\therefore \therefore m_{jk_0} = a m_{jk_1} + b m_{jk_2} + c m_{jk_3} \text{ in } E_j.$$

計算により, 次の公式が成立する事がわかる。

公式 (1) $S(\Delta^{0,1}(k_1, k_2, k_3; k_0)) - S(\Delta^{0,1}(k_0, k_2, k_3; k_1)) + S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_3; k_2))$
 $- S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2; k_3)) = 0.$

(2) $S(\Delta^{0,1}(k_1, k_2, k_3; k_\psi)) - S(\Delta^{0,1}(k_0, k_2, k_3; k_\psi)) + S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_3; k_\psi))$
 $- S(\Delta^{0,1}(k_0, k_1, k_2; k_\psi)) = -d\Phi(x).$

∴ Φ は Abel-Rosen の 3 変数 (1.1.) $\chi = \omega/ad.$

$$\begin{pmatrix} m_{jk_0} \\ m_{jk_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \omega \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{jk_2} \\ m_{jk_3} \end{pmatrix} \pmod{m_{jk_4}} \text{ in } E_j.$$

補題 1 $\delta \left\{ \sum_{k \in X_k^{n-2}} S(\omega_k) \right\} = \{ f_j \}$ $f_j \in \Omega^1(X_j^{n-3})$ とする

とき,

$$f_j = \sum_{k \in S(j)} \varepsilon_{jk} \sum_{D_k^2 \ni \Delta_\mu^2 = \Delta_\mu(\omega_0, \omega_1, \omega_2)} S(\Delta^{0,1}(\varphi_{jk}(\omega_0), \varphi_{jk}(\omega_1), \varphi_{jk}(\omega_2); k))$$

∴ $\varphi_{jk} : S(k) \rightarrow S(j)$; $\varphi_{jk}(\omega) \in S(j)$ かつ,

$$\begin{matrix} X_k^{n-1} > X_k^{n-2} \\ > X_{\varphi_{jk}(\omega)}^{n-2} \end{matrix} > X_j^{n-2} \text{ である。}$$

証明 m_{ij} の "compatibility" $m_{k\ell} |_{X_j} = m_{j\varphi_{jk}(\omega)}$ に
 注意すれば, $S(\omega_k)$, δ 等の定義から直接従う。

補題 2 $\sum_{k \in S(j)} \sum_{D_{jk}^2 \ni \Delta_\mu} \varepsilon_{jk} d\Phi(\chi(\Delta_\mu)) =$

$$= \sum_{k \in S(j)} \sum_{D_k^2 \ni \Delta_\nu = \Delta_\nu(\omega_0, \omega_1, \omega_2)} \varepsilon_{jk} S(\Delta^{0,1}(\varphi_{jk}(\omega_0), \varphi_{jk}(\omega_1), \varphi_{jk}(\omega_2); k))$$

証明 公式(2)より, $\Delta_\mu = \Delta_\mu(a_1, a_2, a_3, a_4) \in D_{jk}^3$ として,

$$d\Phi(x(\Delta_\mu)) = S'(\Delta^{0,1}(a_2, a_3, a_4; k)) - \dots - S^{0,1}(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3; k))$$

$$\therefore \sum_{D_{jk}^3 \ni \Delta_\mu^3} d\Phi(x(\Delta_\mu)) = \sum_{D_{jk}^2 \ni \Delta_\nu^2 = \Delta_\nu^2(a_1, a_2, a_3)} \sum_{\Delta_\mu^3 \ni \Delta_\nu^2} [\Delta_\mu^3 : \Delta_\nu^2] S'(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3; k))$$

$$= \sum_{S_{jk}^2 \ni \Delta_\nu^2 = \Delta_\nu^2(a_1, a_2, a_3)} S'(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3; k))$$

$$= \sum_{D_k^2 \ni \Delta_\nu = \Delta_\nu(a_1, a_2, a_3)} S'(\Delta^{0,1}(a_1, a_2, a_3; k)) +$$

$$+ \sum_{S_{jk}^2 - D_k^2 \ni \Delta_\mu = \Delta_\mu(b_1, b_2, b_3)} S'(\Delta^{0,1}(b_1, b_2, b_3; k))$$

後の項は, $k \in S(j)$ についての和をとるとき, 公式(1)により cancel するから, 補題2, 従って定理I'が証明できた。

——以上——