数理解析研究所講究録
284巻 1976年 171-185

Dissipative Periodic Systems (Levinson-Massera の等式)

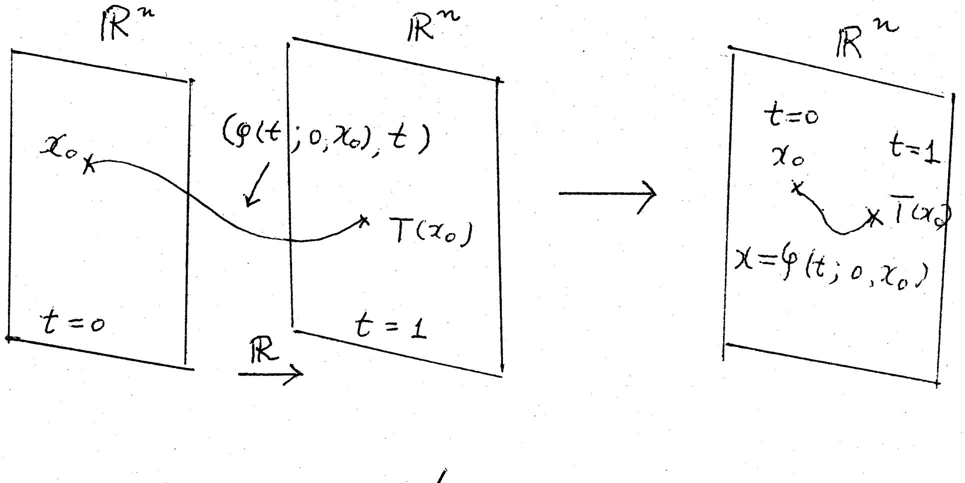
名大 教養部 白岩 謙一

§1. 次のような微分方程式を考える.

(1) $\dot{x} = f(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$

ここで, $f(t,x)$ は C^1 級の $\mathbb{R}^n$ に値をとる関数で, t に関して周期 1 の周期関数であるとする. そして, さらに, 方程式(1)は任意の初期条件 $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ に対して, その解の最大存在区間が $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ となるものとする. そして, このような解を $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ と表わす.

いま写像 $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $T(x_0) = \varphi(1; 0, x_0)$ と定義する. これを方程式(1)の Poincaré 変換という.



<u>命題1</u>　T は C^1 級微分同相写像で，恒等写像と isotopic である．したがって，特に orientation を保つ．

<u>証明</u>　T が全単射で $T^{-1}(x_0)=\varphi(0;1,x_0)$ となる．また，$f(t,x)$ が C^1 級だから，T と T^{-1} は C^1 級である．すなわち，T は C^1 級微分同相写像である．

次に，$T_t:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$　$(0\leqq t\leqq 1)$ を $T_t(x_0)=\varphi(t;0,x_0)$ と定義すると，これは C^1 級微分同相写像で $T_0=1_{\mathbb{R}^n}$（恒等写像）$T_1=T$ となる．そして，T_t の定義する写像 $\mathbb{R}^n\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ は C^1 級である．すなわち，T は $1_{\mathbb{R}^n}$ と isotopic．

<u>命題2</u>　$\varphi(t+1;0,x_0)=\varphi(t;0,T(x_0))$，$t\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^n$

<u>証明</u>　$x(t)=\varphi(t+1;0,x_0)$ が(1)の解であることが $f(t,x)$ の t に関する周期性からわかる．そして $x(0)=\varphi(1;0,x_0)=T(x_0)$ と解の一意性から上の等式が得られる．

<u>系1</u>　$\varphi(t+k;0,x_0)=\varphi(t;0,T^k(x_0))$，$k\in\mathbb{Z}$

<u>系2</u>　(1)の解 $x(t)$ が周期 k（k は自然数）の周期解

$\rightleftarrows$　$x(0)$ が T^k の fixed point

$\rightleftarrows$　$x(0)$ が T の周期 k の periodic point

<u>注意1</u>　周期が有理数の周期解 $x(t)$ に対して，$x(0)$ は T の周期点である．

<u>注意2</u>　周期が無理数の周期解 $x(t)$ に対して，$x(0)$ は T の recurrent point である．したがって，特に non-wandering

である．

<u>定義</u>　$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の不動点 p に対して，その微分（ヤコビ行列）を $DT(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ とする．いま $DT(p)$ の固有値の絶対値がすべて1と異なるとき，p を T の hyperbolic（双曲型）不動点という．

$DT(p)$ の固有値の絶対値がすべて1より大きいとき，p を source といい，これらがすべて1より小さいとき，p を sink という．また，絶対値が1より大きいものと1より小さいものの両方が存在するとき，p を saddle という．

$n=2$ のとき，$\det DT(p)>0$（命題1からわかる）に注意すると，hyperbolic な不動点は次の4種類である．

$DT(p)$ の固有値（特性根）を λ_1, λ_2 とする

(a)　$|\lambda_1|>1,\ |\lambda_2|>1$　completely unstable（source）

(b)　$|\lambda_1|<1,\ |\lambda_2|<1$　completely stable（sink）

(c)　$0<\lambda_1<1<\lambda_2$　directly unstable（saddle）

(d)　$\lambda_2<-1<\lambda_1<0$　inversely unstable（saddle）

T の周期点 p に対しても，その最小周期 k を用いて，T^k の不動点と考え，p が T^k の hyperbolic な不動点のとき，これを T の hyperbolic periodic point と定義する．そして，source, sink, saddle 等が不動点の場合と同様に定義される．

以下簡単のため，不動点についてのみ考察するが，周期点の場合も同様なことが成立する．

いま，pをTの不動点とする．このとき，$DT(p)$は次のようにして求めることができる．

(1)の解 $x=\varphi(t;0,p)$は周期1の周期解である．そこで，(1)の$\varphi(t;0,p)$に関する変分方程式を考える．

(2) $\dot{x} = D_x f(t,\varphi(t;0,p))x$

ここで，$D_x f(t,x)$は$f(t,x)$のxに関する偏微分（ヤコビ行列）である．

(2)は仮定から，周期1の連続な周期関数を係数にもつ線形常微分方程式である．そこで，この基本行列を$W(t)$とすると，次の命題が成立する．

<u>命題3</u> $DT(p) = W(1)\ W(0)^{-1}$

<u>証明</u> 変分方程式の定義と，Tの定義から容易に確かめられる．

<u>命題4</u> pが hyperbolic $\rightleftarrows$ (2)の characteristic exponents はすべてその real parts が0でない．

<u>証明</u> Floquet 理論を用いてわかる．

<u>定義</u> $p \in R^n$をTの hyperbolic な不動点とする．いま，$L = DT(p) : R^n \to R^n$ の絶対値が1より大きい固有値に対する一般化された固有空間の直和とR^nの共通部分をE^uとお

き，絶対値が1より小さい固有値に対する一般化された固有空間の直和と$\mathbb{R}^n$の共通部分をE^sとおく．

<u>命題5</u> (a) $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$，$L(E^s) = E^s$，$L(E^u) = E^u$

(b) $L = DT(p)$ の特性根（固有値）を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とするとき，

$\dim E^s = \#\{\lambda_i \mid |\lambda_i| < 1\}$，$\dim E^u = \#\{\lambda_i \mid |\lambda_i| > 1\}$

(c) 適当な定数 c $(c>0)$，λ $(0<\lambda<1)$ があって

$$\left.\begin{array}{l} \|L^k(x)\| \leqq c\lambda^k \|x\|, \ x \in E^s \\ \|L^{-k}(x)\| \leqq c\lambda^k \|x\|, \ x \in E^u \end{array}\right\} \quad (k \geqq 1)$$

<u>定義</u> p を T の hyperbolic な不動点とするとき，

$W^s(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{k\to\infty} T^k(x) = p\}$

$W^u(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{k\to\infty} T^{-k}(x) = p\}$

とおき，$W^s(p)$ を p の stable manifold，$W^u(p)$ を p の unstable manifold という．

<u>定理</u>（Stable Manifold Theorem）適当な 1−1 immersion $\phi^s : E^s \to \mathbb{R}^n$ があって，次のことが成立する．

(a) $\phi^s(E^s) = W^s(p)$ (b) $\phi^s(0) = p$ (c) $\dim W^s(p) = \dim E^s$

命題5および上の定理の証明については，白岩[6]を参照のこと．

<u>注意3</u> Unstable Manifold に対しても上と同様の定義が成立する．また，hyperbolic な periodic point に対しても，同様なことが成立する．

§2 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とし，p をその不動点とする．いま，$1-T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $(1-T)(x) = x - T(x)$ と定義すると $(1-T)(p) = 0$ となる．

p を T の isolated fixed point とする．すなわち，p の適当な近傍 U があって，$T(x) = x$，となるような U の点は p 以外に存在しないものとする．すると，$(1-T)(U - \{p\}) \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ となる．したがって，$1-T$ は $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジー群の間の準同型写像

$$(1-T)_* : H_n(U, U - \{p\}) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$$

をひき起こす．

ここで，$H_n(U, U-\{p\}) \approx H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \approx \mathbb{Z}$ であって，$\mathbb{R}^n$ に orientation を定めれば，これらの群の生成元 O_U, $O_{\mathbb{R}^n}$ が一意的に定まる．したがって，適当な $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(1-T)_* (O_U) = m \, O_{\mathbb{R}^n}$$

が成立する，この m は U のとり方に無関係である．これを，p の T に関する (fixed point) index といい，$\mathrm{index}_T(p)$ または $\mathrm{index}(p)$ と表わす．

命題6 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像とし，p をその hyperbolic な不動点とする．このとき，次のことが成立する．

(a) p は T の isolated fixed point である．

(b) $\mathrm{index}_T(p)$ は次のように求められる．

$$\mathrm{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) > 0 \\ -1, & \det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)) < 0 \end{cases}$$

証明　Hartmanの定理（白岩［6］）により，Tがhyperbolicな同型写像で，$p=0$のときに証明すれば十分である．そこで，この場合，$1-T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$は同型写像となるから，$\det(1_{\mathbb{R}^n} - DT(p))$が正になるか負になるかにしたがって，$1-T$は$\mathbb{R}^n$のorientationを保ったり，反対にしたりする．このことからすぐわかる．

命題7　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

$$\mathrm{index}_T(p) = \begin{cases} +1, & 1\text{より大きな}DT(p)\text{の実固有値の個数が偶数} \\ -1, & \text{―――――――――――――――が奇数} \end{cases}$$

系1　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．
$\dim E^u = u$とし，$L_u = DT(p)|E^u : E^u \to E^u$とする．

(a)　$\det L_u > 0$なら　$\mathrm{index}_{T^k}(p) = (-1)^u$，$k \geq 1$．

(b)　$\det L_u < 0$なら　$\mathrm{index}_{T^{2k+1}}(p) = (-1)^{u+1}$，$k \geq 0$

$\mathrm{index}_{T^{2k}}(p) = (-1)^u$，$k \geq 1$

系2　命題6と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

(a)　pがsourceなら，$\mathrm{index}_{T^k}(p) = (-1)^n$，$k \geq 1$

(b)　pがsinkなら，$\mathrm{index}_{T^k}(p) = 1$，$k \geq 1$

命題7は命題6を用いてわかる．実際，$1_{\mathbb{R}^n} - DT(p)$をJordanの標準形を用いて表わし，その行列式の符号を$DT(p)$

の特性根(固有値)を用いて計算することによって，命題7の結果を得る．

系1は命題7と簡単な線形代数の計算によって求めることができる．系2は系1と $\det L > 0$ からわかる．

<u>例</u>　$n=2$ とすると系2から次のことがわかる．

p が completely stable または completely unstable なら

$$\mathrm{index}_{T^k}(p) = 1 \quad , \quad k \geqq 1$$

また，系1から次のことがわかる．

p が directly unstable なら $\mathrm{index}_{T^k}(p) = -1$，$k \geqq 1$

p が inversely unstable なら $\mathrm{index}_{T^k}(p) = \begin{cases} +1 , & k : \text{odd} \geqq 1 \\ -1 , & k : \text{even} \geqq 2 \end{cases}$

<u>定理</u>(Poincaré - Hopf - Lefschetz)　$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を連続写像とし，T の不動点はすべて isolated とする．いま，n 次元閉球と同相な $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K があって，次の条件

(a)　$T(K) \subset K$，

(b)　T の不動点はすべて K に含まれる．

をみたすならば，次の等式が成立する．

$$\sum_{T(p)=p} \mathrm{index}_T(p) = 1$$

<u>系</u>　$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を C^1 級微分同相写像，k を自然数とする．いま周期 k の T の周期点はすべて hyperbolic とし，

n次元閉球と同相なR^nの部分集合Kがあって，次の

(a) $T^k(K) \subset K$

(b) 周期kのTの周期点はすべてKに含まれる．

が成立するとき，次の等式が成立する．

$$\sum_{T^k(p)=p} \mathrm{index}_{T^k}(p) = 1$$

系は上の定理からすぐわかる．また，定理の証明はDold [1]を参照されたい．

§3　ここでLevinson-Masseraの等式とその一般化について示す．

定義　方程式(1)がdissipative (D-system)

$\rightleftarrows$　適当な正数Rと自然数Nがあって，(1)の任意の解$x(t)$に対して，次のことが成立する．

適当な$t_0 \in R$に対して，$\|x(t_0)\| \leqq R$ および

$\|x(t)\| \leqq R$，$t \geqq t_0 + N$

例1（Levinson-Langenhop-Opial）次の方程式

(3)　$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = e(t)$

において，$f(x, v)$，$g(x)$，$e(t)$はC^1級とし，これらは次の条件(a)〜(d)を満たすものとする．

(a) $e(t)$は周期1の周期関数で，$E = \max|e(t)|$とおく．

(b) 適当な正数m, aがあって，次の不等式が成立する．

$$f(x,v) \geqq m \quad \text{for} \quad |x| \geqq a, \ |v| \geqq a$$

(c) 適当な正数Mがあって，$f(x,v) \geqq -M$

(d) $\liminf_{x\to\infty} g(x) > Ma+E$，$\limsup_{x\to-\infty} g(x) < -(Ma+E)$

方程式(3)は次の方程式と同値である．

$$(3)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x,y)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(3)′は D-system である．(Opial [5])

例2 (Duffing's Equation) 次の方程式

$$(4) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$$

において，$f(x)$, $g(x)$, $e(t)$ は次の条件をみたすものとする．

(a) $e(t)$ は周期1の周期関数で C^1 級とし，$E = \max|e(t)|$ とする．

(b) 適当な正数 c があって，$f(x) \geqq c$ となる．

(c) $g'(x) \geqq 0$ であって，$\lim_{x\to\infty} g(x) > E$，$\lim_{x\to-\infty} g(x) < -E$

方程式(4)は次の方程式と同値である．

$$(4)' \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) + e(t) \end{cases}$$

(4)′は D-system である．(例1，白岩 [7])

2次元の D-system

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t,x,y) \\ \dot{y} = g(t,x,y) \end{cases}$$

に対して，$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をその Poincaré 変換とする．

いま，各自然数 k に対して，周期 k の周期点はすべて hyperbolic とすると，周期 k の周期点の個数は有限となる．
そこで，自然数 q に対して，

$C(q) = \#\{$最小周期 q の completely stable または completely unstable な周期点$\}$

$I(q) = \#\{$最小周期 q の inversely unstable 周期点$\}$

$D(q) = \#\{$最小周期 q の directly unstable 周期点$\}$

とおくと，次の定理が成立する．

<u>定理</u>（Levinson－Massera）以上の仮定と記号のもとで，次の等式が成立する．

$C(1) + I(1) = D(1) + 1$

q：奇数（$q > 1$）なら　$C(q) + I(q) = D(q)$

q：偶数なら　$C(q) + I(q) = D(q) + 2I\left(\frac{q}{2}\right)$

この定理の証明は Massera [4] を参照されたい．

この定理を一般の次元 n に拡張しよう．そのため，次のような定義を用意しよう．

<u>定義</u>　方程式 (1) が D'-system

$\Longleftrightarrow$　n 次元球体と同相な R^n の部分集合 K があって，次の性質が成立する．

(a)　(1) の任意の解 $x(t)$ に対して，適当な $t_0 \in R$ があって，$x(t_0) \in K$．

(6) (1)の任意の解 $x(t)$ に対して，次のことが成立する．

$x(t_1)\in K$ なら，$x(t)\in K$，$^\forall t\geq t_1$

定義から，次の命題は明らかである．

命題8 D′-system は D-system である．

例3 例1，例2の D-system は実は D′-system である．例えば Opial [5]，白岩 [7] を参照のこと．

例4 (x,y) 平面上で，原点から十分はなれた点に対して，常にその点を通る単一閉曲線が対応して，$t=t_0$ (t_0は任意) のとき，その単一閉曲線の点を通る解 $(x(t),y(t))$ は t が増すとき，(x,y) 平面上でその単一閉曲線の内部に向うような2次元の system を E-system という（古屋 [2]）．

E-system は D′-system である．

定義 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を C^1級微分同相写像とする．いま，p を T の hyperbolic な不動点とし，$L=DT(p):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ による $\mathbb{R}^n$ の直和分解を $\mathbb{R}^n=E^s\oplus E^u$ とする．そして，$L_u=DT(p)|E^u:E^u\to E^u$ とおく．

そのとき，

$\det L_u>0$，$\dim E^u=\mathrm{even}$ なら，p を PD 型

$\det L_u>0$，$\dim E^u=\mathrm{odd}$ なら，p を ND 型

$\det L_u<0$，$\dim E^u=\mathrm{even}$ なら，p を PI 型

$\det L_u<0$，$\dim E^u=\mathrm{odd}$ なら，p を NI 型

と定義する.

周期点についても同様に定義する.

<u>定理</u> 方程式(1)がD-systemとし, $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$をそのPoincaré変換とする. そして, すべての自然数qに対して, 周期qの周期点はすべてhyperbolicとする.

このとき, 各自然数qに対して, 周期がqの周期点の個数は有限個となる. そこで, いま

$PD(q)=\#\{$最小周期qのPD型周期点$\}$

$ND(q)=\#\{$ 〃 〃 ND型 〃 $\}$

$PI(q)=\#\{$ 〃 〃 PI型 〃 $\}$

$NI(q)=\#\{$ 〃 〃 NI型 〃 $\}$

$N(q)=\#\{$最小周期qの周期点$\}$

とおくと, 次の等式が成立する.

$$PD(1)+NI(1)=ND(1)+PI(1)+1$$

$$\begin{aligned}N(1)&=PD(1)+ND(1)+NI(1)+PI(1)\\&=2(ND(1)+PI(1))+1\end{aligned}$$

qを1より大きい奇数とすると

$$PD(q)+NI(q)=ND(q)+PI(q)$$

$$\begin{aligned}N(q)&=PD(q)+ND(q)+NI(q)+PI(q)\\&=2(PD(q)+NI(q))=2(ND(q)+PI(q))\end{aligned}$$

qを偶数とすると

$$PD(q)+NI(q)+2PI(q/2)=ND(q)+PI(q)+2NI(q/2)$$
$$N(q)=PD(q)+ND(q)+NI(q)+PI(q)$$
$$=2(ND(q)+PI(q)+NI(q/2)-PI(q/2))$$

系　上の定理と同じ仮定のもとで，次のことが成立する．

(a)　$N(1)$は奇数である．

(b)　qを1より大きい奇数とすると，$N(q)$は$2q$で割り切れる．

(c)　qを偶数とし，$PI(q/2)=NI(q/2)$とすると，$N(q)$は$2q$で割り切れる．特に，$PI(q/2)=NI(q/2)=0$ならば，$N(q)$は$2q$で割り切れる．

この系は上の定理からすぐわかる．また，上の定理は，命題7系1，Poincaré-Hopf-Lefschetzの定理等を用いて，Massera [4]と同様に証明できる．詳細は白岩[8]を参照されたい．

参考文献

[1] A. Dold: Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts, Topology 4 (1965), 1–8

[2] 古屋茂：非線型問題（強制振動論），共立，1957

[3] N. Levinson: Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math. 45 (1944), 723–737, Corrections, ibid. 49 (1948), 738

[4] J.L. Massera : The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order, Ann. of Math. 50 (1949), 118–126

[5] Z. Opial : Démonstration d'un théorème de N. Levinson et C. Langenhop, Ann. Polon. Math. 7 (1960), 241–246

[6] 白岩謙一 : 力学系の理論, 岩波, 1974

[7] 〃 : Boundedness and Convergence of solutions of Duffing's Equation, to appear

[8] 〃 : A generalization of the Levinson-Massera's equalities, to appear