数理解析研究所講究録
284巻 1976年 167-170

Liénard equations without limit cycle

名大 教養 大和一夫

Liénard equation

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - f(x), \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad \text{但し}$$

(1) f : odd, C^1 級, $f_x(0) < 0$,

の limit cycles の個数を数えるという問題がある。ここでは limit cycle があらわれないための条件（十分）を与える。

この方程式を扱う理由は，物理工学的には，(*) は $\ddot{x} + f_x(x)\dot{x} + x = 0$ と表わされ振動現象を記述し，数学的には $f(x)$ という一変数の関数ひとつの性質の研究という意味でもっとも簡単だからである。

Remark. グラフ $y = f(x)$ を Liénard の特性曲線という。この曲線上で接ベクトル（(*)の）が y 軸に平行になる。

仮定 $f_x(0)<0$ は原点 $(0,0)$ が unstable singular point であること，f : odd はこの方程式が原点に関して対称であることを意味する．

次の事実が知られている．

(Liénard) $\exists a>0$ s.t. $f(x)<0$, $x\in(0,a)$, $f(a)=0$
$f_x(x)>0$, $x\in(a,\infty)$,

$\Rightarrow$ $\exists 1$ limit cycle，そしてこれは stable, i.e., 任意の nontrivial integral curve はこの limit cycle に $t\to\infty$ のとき近づく．

(Graef [1]) $\exists b>0$, $\exists c>0$: constants s.t. $f(x)>c$
$x\in(b,\infty)$

$\Rightarrow$ $\exists \underset{\text{compact}}{K\subset\mathbb{R}^2}$，すべての integral curve は，$t\to\infty$ のとき K に入る．従って少くともひとつ limit cycle がある．

そこで $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ のときどうなるか知りたい．もし $\sup f(x)>0$ が十分小，そして十分速く $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ なら limit cycle があらわれないと期待される．

以下，簡単のため次の仮定をする．

(2) $\exists a>0$, $f(a)=0$, $f(x)<0$, $x\in(0,a)$
$f(x)>0$, $x\in(a,\infty)$.

<u>Theorem</u>. 次の条件がみたされていれば limit cycle なし：

$$\alpha = 2 + \frac{1+a^2}{2}\max_{|x|\le a}|f(x)|^2$$ とおく．

$$\frac{-\int_0^a x f(x)\,dx}{\int_a^\infty x f(x)\,dx} > \alpha ,$$

$$-\int_0^a x f(x)\,dx > \left(1 + \frac{\alpha}{2}\left(\int_0^a x f(x)\,dx\right)^2 + \frac{\alpha}{2}x^2\right) f(x) + \alpha\int_a^x x f(x)\,dx,$$

for $\forall x > a$.

Proof. Liapunov function として

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\alpha(x^2+y^2) + \log\left(x^2 + (y-h(x))^2\right)$$

但し，$\alpha > 0$ 定数，$h(x)$: odd は あとで 適当に きめる．α, $h(x)$ を選んで $\dot{V}(x,y) = \frac{d}{dt}V(x,y) \geqq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, と できれば よい．

<u>Lemma 1</u>.

$$\dot{V}(x,y) = -\alpha x f(x) + 2\cdot\frac{-x(f(x)-h(x)) - h_x(x)(y-f(x))(y-h(x))}{x^2 + (y-h(x))^2}$$

以下 $h(x)$ について 次の仮定をする：

(3) $h_x(0) = 0$, $h_x(x) > 0$, $x \in (0, a)$, $h_x(a) = 0$,
$h_x(x) < 0$, $x \in (a, \infty)$

つづく

つづき

$$h(x)-f(x)>0,\quad h(x)>0,\quad x\in(0,\infty)$$

よって、次の二つの条件を整理すればよい：

(i) $\dot{V}(x,y)\geqslant 0 \quad ,\forall x\in(0,a),\ \forall y\in\mathbb{R}.$

(ii) $\dot{V}(x,y)\geqslant 0 \quad ,\forall x\in(a,\infty),\ \forall y\in\mathbb{R}.$

(3) を考慮すると

$$\text{(i)} \iff \alpha\geqslant -\frac{h_x}{xf}+\frac{h-f}{x^2f}-\frac{\sqrt{(xh_x+h-f)^2+h_x^2(h-f)^2}}{x^2f}$$

$$\forall x\in(0,a)$$

$$\text{(ii)} \iff -\alpha xf-h_x+\frac{h-f}{x}\geqslant 0$$

$$(\alpha xf)^2-2\alpha xf\left(-h_x+\frac{h-f}{x}\right)-4h_x\cdot\frac{h-f}{x}-\frac{h_x^2(h-f)^2}{x^2}\geqslant 0$$

$$\forall x\in(a,\infty)$$

この右辺の不等式は適当な評価によって Th. の条件になる。

証明終.

Reference

[1] J.R. Graef: On the Generalized Liénard Equation
J of Diff. Eqs, 12, 34-62 (1972)