

## 極大な双曲型不変集合について

北大 理学部 倉田雅弘

$M$  を多様体、 $f: U \rightarrow M$  を  $M$  の開集合から開集合の上への微分同型、 $A \subset U$  を双曲型不変集合とする。ここでは、 $A$  が十分小さな近傍で極大な不変集合であるとき、その構造を調べる。このような双曲型不変集合の例としては、 $A = M$ 、即ち  $f$  が Anosov 微分同型 ( $\text{cl Per}(f) = M$  を仮定しない) などがある。

始めに 必要な定義を述べる。

定義  $U \subset M$  を多様体  $M$  の開集合、 $f: U \rightarrow M$  を  $M$  の開集合の上への微分同型とする。  $f$ -不変な compact 集合  $A$  が以下を満すとき、双曲型不変集合 という。

$T_1 M$  が  $Tf$ -不変な subbundle の Whitney 和

$$T_1 M = E^s \oplus E^u$$

と表わされ、 $C > 0$ ,  $0 < \lambda < 1$  が存在して、 $n \geq 0$  に対して、

$$v \in E^s \text{ のとき, } \|Tf^n v\| < C\lambda^n \|v\|$$

$$v \in E^u \text{ のとき, } \|Tf^{-n} v\| < C\lambda^n \|v\|$$

となる。

定義  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  を有限集合とする。 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  を、 $\mathbb{Z}$  から  $\mathcal{A}$  の function 全体の空間に compact-open topology が入っているものとする。ただし、 $\mathcal{A}$ ,  $\mathbb{Z}$  の位相は離散トポロジーとする。写像

$$p: \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$$

を、 $p((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , ただし、 $b_i = a_{i+1}$  で定義する。 $T = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  を  $n \times n$  0-1 行列とする。 $p$ -不変な  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  の閉集合  $\Sigma$

$$\Sigma = \{ (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid t_{a_i a_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathcal{A} \}$$

を (symbol  $\mathcal{A}$  上の 行列  $T$  によって決まる) 有限型の subshift といふ。 $p$  を shift transformation といふ。 $p$  は位相同型である。

定義 以下を満たすとき、双曲型不変集合  $\Lambda$  は local

product structure をもつ という。

正数  $\delta$  があって、任意の  $x \in \Lambda$  に対して、

$$\phi: W_\delta^s(x; \Lambda) \times W_\delta^u(x; \Lambda) \longrightarrow \Lambda$$

は、 $x$  の  $\Lambda$  での近傍の上  $\Lambda$  の位相同型である。ただし、ここ

で  $\phi(y, z) = W_\delta^u(y; \Lambda) \cap W_\delta^s(z; \Lambda)$  とする。

定義 次のみたす閉集合  $D \subset W_\delta^s(\Lambda)$  を ( $W_\delta^s(\Lambda)$  に対する) proper fundamental domain という。

$$\bigcup_{n \neq 0} f^n(D) \supset W_\delta^s(\Lambda) - \Lambda,$$

$$D \cap \Lambda = \emptyset.$$

$\delta > 0$ ,  $x \in \Lambda$  に対して

$$W_\delta^s(x; \Lambda) = W_\delta^s(x) \cap \Lambda,$$

$$W_\delta^u(x; \Lambda) = W_\delta^u(x) \cap \Lambda$$

等とおく。

我々は [3] で得た次の結果を用いる。

定理 0  $\Lambda$  を双曲型不変集合、 $U$  をその近傍とする。このとき、双曲型不変集合  $\Lambda'$  で  $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$  とする  $\varepsilon$  ので、以

下をみたすものがある。

有限型の subshift  $\Sigma$  と、 $M$  の写像  $\pi: \Sigma \rightarrow M$  があって、 $f\pi = \pi p$  となる。E.E.L. ここで  $p$  は shift transformation である。(  $\pi$  を  $\Sigma$  から  $M$  の semi-conjugacy という。 )

上の定理から、次を得る。

系  $M$  を双曲型不変集合で、ある近傍では、極大な不変集合となっているものとする。このとき、有限型の subshift  $\Sigma$  と、 semi-conjugacy  $\pi: \Sigma \rightarrow M$  が存在する。

次に、極大な双曲型不変集合の性質を求める。

補題 1 次の (1), (2), (3) は同値である。

(1)  $M$  の近傍  $U$  があって、 $M$  は  $U$  の極大な双曲型不変集合である。

(2)  $M$  は local product structure をもつ。

(3)  $M$  は proper fundamental domain をもつ。

証明 (1)  $\Rightarrow$  (2) を示す。  $\delta > 0$  を十分小さく選んで、 $2\delta < d(M, M-U)$ ,  $\epsilon > 0$  任意の  $x, y \in M$  に対して、 $W_\delta^\epsilon(x) \cap W_\delta^\epsilon(y) = \text{一点}$  となるようにする。  $W_\delta^\epsilon(x) \cap W_\delta^\epsilon(y) = \{z\} \subset M$  を示すとよい。  $d(f^n(x), f^n(z)) < \delta$

- (ただし、 $n \geq 0$ )、 $n < 0$  に対しては、 $d(f^n(y), f^n(z)) < \delta$  だから、 $d \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(z) \subset U$ 。  $\Lambda$  は  $U$  で極大な不変集合だから  $d \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(z) \subset \Lambda$ 。 故に  $z \in \Lambda$ 。
- (2)  $\Rightarrow$  (3), (3)  $\Rightarrow$  (1) は [5], [4] を見よ。

補題 2 双曲型不変集合  $\Lambda$  に対して、有限型の subshift  $\Sigma$  と semi-conjugacy  $\pi: \Sigma \rightarrow \Lambda$  が存在するとする。このとき、有限個の周期点  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \Lambda$  があって、

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\ell} d W^s(\alpha_i; \Lambda)$$

$$\text{int}_{\Lambda} d W^s(\alpha_i; \Lambda) \neq \emptyset \quad (i=1, \dots, \ell)$$

となる。ただし、 $\text{int}_{\Lambda}$  は  $\Lambda$  における interior を示す。

証明  $x \in \Lambda$  に対して、 $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$  を  $\pi((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = x$  となるものとする。  $\Sigma$  の symbol の個数を  $N$  とすると、任意の整数  $m$  に対して、 $n, n+k \in \mathbb{Z}$  があって、

$$a_n = a_{n+k}$$

$$m \leq n < n+k \leq m+N+1$$

となる。

$$(b_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma \text{ を}$$

$$i \leq n+k \text{ のとき } b_i = a_i$$

$$i \geq 1, \quad 0 \leq j \leq k-1 \text{ のとき } b_{m+i+k+j} = a_{m+j}$$

とおき、 $(c_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$  を、 $l \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq j \leq k-1$  に対して、  
 $C_{l+ij} = a_{l+ij}$  となる周期点とすると、 $\pi((b_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \in W^s(\pi(0), \Lambda)$   
 となる。従って、 $\Lambda$  は周期  $N+1$  以下の周期点の closure の  
 和にかける。このとき  $\text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(p; \Lambda) = \emptyset$  ( $p$  は周期  
 $N+1$  以下の周期点) は除いてもよい。Q.E.D.

以上の準備のもとに、次を得る。

定理 1  $\Lambda$  は双曲型不変集合で、十分小さな近傍での極大  
 な不変集合となっているものとする。

(1)  $\Lambda$  の  $f$ -不変な閉集合  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  があって、以下  
 をみたす。

$$(a) \Lambda = \bigcup_{i=1}^m \text{cl } W^s(\Omega_i; \Lambda).$$

(b)  $W^s(\Omega_i; \Lambda)$  は  $\Lambda$  での開集合。

$$(c) \Omega_i = W^u(\Omega_i; \Lambda) = \text{cl } \text{Per}(f|_{\Omega_i})$$

$$(d) i \neq j \text{ のとき } W^s(\Omega_i; \Lambda) \cap W^s(\Omega_j; \Lambda) = \emptyset.$$

(2)  $\Lambda$  の  $f$ -不変な閉集合  $\Omega'_1, \dots, \Omega'_m$  があって、以下  
 をみたす。

$$(a) \Lambda = \bigcup_{i=1}^m \text{cl } W^u(\Omega'_i; \Lambda)$$

(b)  $W^u(\Omega'_i; \Lambda)$  は  $\Lambda$  での閉集合。

$$(c) \Omega'_i = W^s(\Omega'_i; \Lambda) = \text{cl } \text{Per}(f|_{\Omega'_i})$$

$$(d) i \neq j \text{ のとき } W^u(\Omega'_i; \Lambda) \cap W^u(\Omega'_j; \Lambda) = \emptyset.$$

証明  $x_1, \dots, x_n \in \Lambda$  を 補題2 で与えられた周期点とする。  
 $x \in W^s(x_i; \Lambda) \cap \text{int}_\Lambda \text{cl} W^s(x_i; \Lambda)$  とすると、十分小さい  $\delta > 0$  に対して、正の整数  $n$  があって、

$$d(f^n(x), x_i) < \delta,$$

$$\phi: W_\delta^u(f^n(x); \Lambda) \longrightarrow W_{3\delta}^u(x_i; \Lambda)$$

は、 $x_i$  の  $W_{3\delta}^u(x_i; \Lambda)$  における近傍の上への位相同型となる。

そこで、 $\phi(y) = W_{3\delta}^s(y; \Lambda) \cap W_{3\delta}^u(x_i; \Lambda)$  とする。補題1から、 $\phi$  は well defined である。従って、 $W_\delta^u(x_i; \Lambda) \subset \text{int}_\Lambda \text{cl} W^s(x_i; \Lambda)$  となるから、 $W^u(x_i; \Lambda) = \bigcup_{n \geq 0} f^n W_\delta^u(x_i; \Lambda) \subset \bigcup_{n \geq 0} f^n(\text{int}_\Lambda \text{cl} W^s(x_i; \Lambda)) = \text{int}_\Lambda \text{cl} W^s(x_i; \Lambda)$ 。

もし、 $\text{int}_\Lambda \text{cl} W^s(x_i; \Lambda) \cap \text{int}_\Lambda \text{cl} W^s(x_j; \Lambda) \neq \emptyset$  ならば、 $\text{cl} W^s(x_i; \Lambda) = \text{cl} W^s(x_j; \Lambda)$  となるから、 $x_1, \dots, x_n \in \Lambda$  を適当に選びなおすことにより、

$$i \neq j \text{ ならば、 } \text{cl} W^s(x_i; \Lambda) \cap \text{cl} W^s(x_j; \Lambda) = \emptyset$$

とできる。

$\Omega_i = \text{cl} W^u(x_i; \Lambda)$  とおく。  $\Omega_i$  には homoclinic point が稠密にあるから、 $\text{cl} \text{Per}(f|_{\Omega_i}) = \Omega_i$  である。

$W^s(\Omega_i; \Lambda)$  は  $\Lambda$  での開集合である。何故なら、任意の  $x \in W^s(\Omega_i; \Lambda)$  に対して、 $x \in W^s(p; \Lambda)$  とすると、十分小さい正数  $\delta$ 、 $d(f^n(x), f^n(p)) < \frac{\delta}{2}$  となる  $n \in \mathbb{Z}$  に対して、 $\phi(y, z) = W_{2\delta}^u(y; \Lambda) \cap W_{2\delta}^s(z; \Lambda)$  で定義された写像

$$\phi: W_S^s(f^m(p): \Lambda) \times W_S^u(f^m(p): \Lambda) \longrightarrow \Lambda$$

は、 $\Lambda$  における  $f^m(p)$  の近傍で、 $f^m(x)$  を内部に含むもの  $\Lambda$  の位相同型となる。

$\text{cl } W^s(x_i: \Lambda) \supset \Omega_i$  だから、 $\text{cl } W^s(x_i: \Lambda) \supset W^s(\Omega_i: \Lambda) \supset W^s(x_i: \Lambda)$  となるので、 $W^s(\Omega_i: \Lambda) = \text{int}_\Lambda \text{cl } W^s(x_i: \Lambda)$ 。  
従って

$$\begin{aligned} \Lambda &= \bigcup_{i=1}^n \text{cl } W^s(x_i: \Lambda) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \text{cl } W^s(\Omega_i: \Lambda). \end{aligned}$$

故に、(1)を得る。(2)の証明も同様である。

定理2  $\Lambda$  は双曲型不変集合で、十分小さな近傍での極大な不変集合とする。 $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_\ell$  を互いに交わらない  $f$ -不変な閉集合  $\Lambda$  の極小な分解とする。このとき、各  $i$  ( $i=1, \dots, \ell$ ) に対して、 $\Lambda_i$  は次のいずれかを満たす。

(1)  $\text{Per}(f|_{\Lambda_i})$  は、 $\Lambda_i$  で稠密である。

(2)  $\text{Per}(f|_{\Lambda_i})$  は、 $\Lambda_i$  で nowhere dense である。

証明  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  と  $\Omega'_1, \dots, \Omega'_m$  を定理1で得られたものとする。 $\Lambda_1, \dots, \Lambda_\ell$  を互いに交わらない閉集合で、 $\Lambda_k \cap \text{cl } W^s(\Omega_j: \Lambda) \neq \emptyset$  ならば、 $\Lambda_k \supset \text{cl } W^s(\Omega_j: \Lambda)$ 、 $\Lambda_k \cap \text{cl } W^u(\Omega'_j: \Lambda) \neq \emptyset$  ならば、 $\Lambda_k \supset \text{cl } W^u(\Omega'_j: \Lambda)$





[5] R. C. Robinson: Structural Stability of  $C^1$  Diffeomorphisms, (to appear).