数理解析研究所講究録
284巻 1976年 96-112



# Differentiable Dynamical Systems on Noncompact Manifolds

京大 理　　古池時日児

この小論の目的は Axiom A を noncompact manifolds の場合に拡張して，compact manifolds の場合に得られた諸結果を non compact manifolds の場合に述べ直すことである.

M を noncompact で boundary をもたない manifold とし，$f$: M $\circlearrowleft$ を次の条件をみたす $C^r$ diffeomorphism $(r \geq 1)$ とする.

(m)　M の任意の compact set K に対して，$\overline{O(K)}$ は compact である.

(注)　$O(K) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K)$ .

$\Omega = \Omega(f)$ を $f$ の non wandering set とする. $\Omega$ は M の closed set である. (m)-diffeomorphism $f$ に対して，Axiom A を次のように定義する.

Axiom A (a)　$\Omega$ は hyperbolic である. すなわち, $\Omega$ 上の

continuous vector bundle $E^s, E^u$ が存在して,

(1) $T_\Omega M = E^s \oplus E^u$

(2) $E^s, E^u$ は $Tf$-invariant である.

(3) 任意の compact invariant set $K \subset \Omega$ に対して,

constants $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ が存在して,

$$v \in E^s_K \Rightarrow \|Tf^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad n = 1, 2 \cdots$$

$$v \in E^u_K \Rightarrow \|Tf^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\| \quad n = 1, 2 \cdots$$

ここで, $E^s_K = E^s|K$, $E^u_K = E^u|K$ ($E^s, E^u$ の $K$ の上への制限) とする.

Axiom A (b) $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$

(注) $TM$ 上に Riemann metric $\| \ \|$ が入っているものとする.

$M$ が compact manifold であるときと同様に $(m)$-diffeomorphism $f$ が Axiom A をみたすとき, 各 $x \in \Omega$ に対して, local stable manifold $W^s_\varepsilon(x)$, local unstable manifold $W^u_\varepsilon(x)$, stable manifold $W^s(x)$, 及び unstable manifold $W^u(x)$ が定まる.

Theorem 1 (Local product structure) $(m)$-diffeomorphism $f$ が Axiom A をみたすとする. そのとき, 任意の compact set $K \subset \Omega(f)$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さくとると,
$$W^s_\varepsilon(K) \cap W^u_\varepsilon(K) \subset \Omega(f)$$

Proof. $M$ が compact manifold であるときと全く同様に証

明できるので省略する.

次の Theorem は最も基本的である.

Theorem 2. (Spectral decomposition) (m)-diffeomorphism $f$ が Axiom A をみたすとする. そのとき, $\Omega = \Omega(f)$ は次の (1°), (2°) をみたす可算個の部分集合の直和に分解される.

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots\cdots$$

(1°) $\Omega_i$ は compact, invariant かつ transitive である.

(2°) 任意の compact set $K \subset M$ に対して, $\Omega_i \cap K \neq \phi$ となる $\Omega_i$ の個数は有限個である.

Proof. 次の2つの Lemma が証明の土台である.

Lemma 1 Theorem 2 と同じ仮定の下で。任意の $x \in \Omega$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば, 次のことが成り立つ; $N_x = \bigcup \{ W_\varepsilon^s(y_1) \cap W_\varepsilon^u(y_2) ; y_1 \in W_\varepsilon^u(x) \cap \Omega, \ y_2 \in W_\varepsilon^s(x) \cap \Omega \}$ とおくとき,

(1) $N_x$ は $\Omega$ の open subset である.

(2) $N_x$ の任意の open subset $U$ に対し, $O(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$ は $N_x$ において dense である.

Proof of Lemma 1. (1) は Theorem 1 より明らか. (2) は, Axiom A(b) と Birkoff's Theorem より容易に証明される.

Lemma 2. $X$ を separable complete metric space とし, $h : X \to X$ を次の (a) をみたす homeomorphism とする.

(a) $X$の任意の non empty open set $U$は dense orbit をもつ．すなわち，$\overline{O(U)} = X$

このとき，$\{x \in X \ ; \ \overline{O(x)} = X\}$ は$X$において dense である．

Proof of Lemma 2．Z. Nitecki [6] P 196 参照．

さて，Theorem 2 を証明する．各$x \in \Omega$に対して，Lemma 1 のように，$N_x$ を1つきめる．そして $\Omega_x = \overline{O(N_x)}$ とおく．$\overline{N_x}$が compact であるから，$\Omega_x$ も compact である．もちろん．$\Omega_x$ は invariantである．任意の $x, y \in \Omega$ に対して $\Omega_x = \Omega_y$ か，$\Omega_x \cap \Omega_y = \phi$ であることを証明する．仮に $\Omega_x \cap \Omega_y \neq \phi$ とする．そのとき，ある $n, m \in \mathbb{Z}$ があって $f^n(N_x) \cap f^m(N_y) \neq \phi$ となる．$U = f^n(N_x) \cap f^m(N_y)$ とおくと，Lemma 1によって，$\overline{O(U)} \supset N_x$，$\overline{O(U)} \supset N_y$ これより，$\overline{O(U)} = \overline{O(N_x)}$，$\overline{O(U)} = \overline{O(N_y)}$ をうる．すなわち，$\Omega_x = \Omega_y$．また，Lemma 2 より $\Omega_x$ が transitive であることが分る．また，$\{\Omega_x\}_{x \in \Omega}$ に関して，Theorem の(2°) が成り立つことは明らか．したがってまた $\{\Omega_x\}$は可算集合である．

Theorem 3．Axiom A をみたす (m) diffeomorphism $f$ の stable manifolds $\{W^s(x) \ ; \ x \in \Omega\}$ に関して次のことが成り立つ．

(1) $x, y \in \Omega$ に対し，$W^s(x) = W^s(y)$ か $W^s(x) \cap W^s(y) = \phi$

(2) $M = \bigcup_{x \in \Omega} W^s(x)$

Proof. $M$ が compact manifold であるときと同様である。

Def. $f: M \circlearrowleft$ を Axiom A をみたす (m)-diffeomorphism とする。$\{\Omega_i\}_{i=1,2,\cdots}$ を $f$ の basic sets とする。$\widetilde{W}^s(\Omega_i) = W^s(\Omega_i) - \Omega_i$ , $\widetilde{W}^u(\Omega_i) = W^u(\Omega_i) - \Omega_i$ とおく。そのとき，$\Omega_i < \Omega_j$ を $\widetilde{W}^s(\Omega_i) \cap \widetilde{W}^u(\Omega_j) \neq \phi$ で定義する。そして，$\Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \cdots < \Omega_{i_\ell} < \Omega_{i_1}$ $(1 \leq \ell < \infty)$ となる列 $\{\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_\ell}\}$ を $\Omega$ の cycle とよぶ。$\Omega$ の cycle がまったく存在しないとき，$f$ は no cycle condition をみたすという。

$f$ が no cycle condition をみたすとき，$\Omega_i \leqq \Omega_j$ を，" $\Omega_i = \Omega_j$ または basic sets $\Omega_{i_1}, \cdots \Omega_{i_n}$ で，$\Omega_i < \Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \cdots < \Omega_{i_n} < \Omega_j$ となるものが存在する" と定義する。そのとき，$(\{\Omega_i\}_{i=1,2,\cdots}, \leqq)$ は順序集合になる。つぎのような無限列を $\omega$ sequence (あるいは $\alpha$ sequence) とよぶ

$$\Omega_{i_1} > \Omega_{i_2} > \Omega_{i_3} > \cdots\cdots$$

(あるいは，$\Omega_{i_1} < \Omega_{i_2} < \Omega_{i_3} < \cdots\cdots$ )

Lemma 3. $\Omega$ が no cycle condition をみたし，かつ $\omega$ sequence をもたないならば，任意の basic set $\Omega_{i_0}$ に対し，$\Omega_i \leqq \Omega_{i_0}$ となる $\Omega_i$ の個数は有限である。

Proof 省略.

Theorem 4 (Filtration) (m)-diffeomorphism $f: M \circlearrowleft$ が Axiom A をみたし，さらに，no cycle condition 及び，no $\omega$-sequence condition をみたすとする．そのとき，$f$ の basic sets に適当に番号付 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ すると，

(☆) $i < j \Rightarrow \Omega_j \leqq \Omega_i$ でない．

とできる．

さらに，かかる番号付 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$ に対して，$M$ の open subsets の列 $M_0 = \phi, M_1, M_2, \cdots$ で次の(1)〜(5)をみたすものが作れる．

(1) $\overline{M_i}$ は compact である．

(2) $\overline{M_{i-1}} \subset M_i \qquad i = 1, 2 \cdots$

(3) $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$

(4) $f(\overline{M_i}) \subset M_i \qquad i = 1, 2 \cdots$

(5) $\Omega_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - \overline{M}_{i-1})$

Proof $M$ が compact manifold であるときと同様である．

Def. (m)-diffeomorphism $f$ が次の条件をみたすとき，$f$ は $(m^+)$-diffeomorphism であるということにする．

(*) 任意の compact set $K$ に対して 次のような compact set $\widetilde{K}$ が存在する．

(1) $K \subset \widetilde{K}$

(2) $\widetilde{K}$ の任意の open neighborhood $U$ に対して，compact

set $K_1$ で，$\widetilde{K} \subset \operatorname{int} K_1$ かつ $\overline{\mathcal{O}^+(K_1)} \subset U$ となるものが存在する．(注) $\mathcal{O}^+(K_1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(K_1)$

次の Lemma は容易に証明される．Axiom A をみたす (m)-diffeomorphism のことを単に (Am) diffeomorphism とよぶことにする．

Lemma 4　(Am)-diffeomorphism $f$ が no cycle condition をみたすとき，次の (I), (II) は同値である．

(I)　$(m^+)$

(II)　no $\omega$ sequence condition.

Proof　省略

Def　M を non compact manifold とする．$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ が $\Omega$-stable であるとは，identity map $1_{\Omega(f)} \in C^0(\Omega(f), M)$ の近傍 $\mathcal{W}$ に対して，$f$ の近傍 $\mathcal{N} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ で次の条件をみたすものが存在するときをいう．

(☆) 任意の $g \in \mathcal{N}$ に対して，$\varphi(g) \in \mathrm{Homeo}(\Omega(f), \Omega(g)) \cap \mathcal{W}$ で，$\varphi(g) \circ f = g \circ \varphi(g)$ となるものが存在する．

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f} & \Omega(f) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi(g)} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi(g)} \\ \Omega(g) & \xrightarrow{g} & \Omega(g) \end{array}$$

この $\varphi(g)$ を conjugacy とよぶ．

さて，$u \in \mathrm{Diff}(M)$ に対し，$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in M \,;\, u(x) \neq x\}}$

とおく．$f \in Diff^1(M)$ に対し，$\mathrm{supp}\, g^{-1}\cdot f$ が compact である $g \in Diff^1(M)$ 全体を $\sum_f$ で表わす．また，compact set $K \subset M$ に対して，$\mathrm{supp}\, g^{-1}\cdot f \subset K$ となる $g \in Diff^1(M)$ 全体を．$\sum_f(K)$ で表わす。

さて，(m)-diffeomorphism $f \in Diff^1(M)$ が absolutely $\Omega$-stable とは，任意の compact invariant set $K \subset M$ に対して，$f$ の近傍 $\mathcal{N} \subset Diff^1(M)$ と，$\mathcal{N} \cap \sum_f(K)$ から $C^0(\Omega(f), M)$ への map $\varphi$ で次の条件をみたすものが存在する；

(1) $g \in \mathcal{N} \cap \sum_f(K)$ に対して，$\varphi(g) \in \mathrm{Homeo}(\Omega(f), \Omega(g))$ であり，$\varphi(g) \circ f = g \circ \varphi(g)$ である．

(2) ある constant $C$ に対して，

$$d(\varphi(g)|\Omega_K, 1_{\Omega_K}) \leq C\, d(f, g)$$

ここで，$d$ は mapping space の metric を表わす．また，$\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \mathrm{int}\, K}$ ．

Theorem 5 ($\Omega$-stability) (Am)-diffeomorphism $f$ が no cycle condition，及び no $\omega$-sequence condition をみたすならば，$f$ は $\Omega$-stable である．

Theorem 6．(m)-diffeomorphism $f$ が，Axiom A (b) をみたし，absolutely $\Omega$ stable ならば，$f$ は Axiom A (a) をみたす．

Theorem 7 $(m^+)$-diffeomorphism $f$ が Axiom A (b) をみたし，absolutely $\Omega$ stable ならば，$f$ は Axiom A，no cycle condition 及び no $\omega$ sequence condition をみたす．したがって，$f$ は $\Omega$-stable である．

(注) absolutely $\Omega$ stable であっても $\Omega$ stable とは限らない．

Proof of Theorem 5．証明の土台は Theorem 4 である．M が compact manifold であるときと同様に証明できるので省略する．

Proof of Theorem 6 次の 3 つの Proposition を証明すればよい．[2]，[3]．

Prop 1 $(m)$-diffeomorphism $f: M \circlearrowleft$ が Axiom A (b) をみたし，$f$ のすべての periodic points が hyperbolic のとき，次の条件は同値である．

(I) $f$ は Axiom A (a) をみたす．

(II) 任意の compact invariant set $K$ に対して，$I-f^{\#}: \Gamma_{\Omega_K} \longrightarrow \Gamma_{\Omega_K}$ は isomorphism である．

(注) $\Omega_K = \overline{\Omega(f) \cap \mathrm{int} K}$，$\Gamma_{\Omega_K}$ は $TM|\Omega_K$ の continuous section の全体，また，$\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}$，$p \in \Omega_K$ に対して，$((I-f^{\#})\gamma)(p) = \gamma(p) - Tf \cdot \gamma \cdot f^{-1}(p)$ とおく．

Prop 2 $(m)$-diffeomorphism $f$ が absolutely $\Omega$ stable

ならば，任意の compact invariant set $K$ に対して，$I-f^{\#}$: $\Gamma\Omega_K \longrightarrow \Gamma\Omega_K$ は injective である．

Prop 3 (m)-diffeomorphism $f$ が absolutely $\Omega$ stable ならば，$I-f^{\#}: \Gamma\Omega_K \longrightarrow \Gamma\Omega_K$ は surjective である．

Proof of Prop 1. (I)$\Rightarrow$(II) は容易に証明できるので，(II)$\Rightarrow$(I) を証明する。Banach space $\Gamma\Omega_K$ の複素化を $\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ で表わす。$I-f^{\#}: \Gamma\Omega_K \longrightarrow \Gamma\Omega_K$ は自然に linear map $I-f^{\#}: \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K} \longrightarrow \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ に拡張できる．後者も isomorphism であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，

$$\|(I-f^{\#})\gamma\| \geqq 3\varepsilon\|\gamma\| \qquad \text{for all } \gamma \in \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$$

となる．まず次の事を証明する．

(Claim) ある $\varepsilon' > 0$ が存在して，すべての $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ に対して，$\|(f^{\#}-I)\gamma\| \geqq \varepsilon'\|\gamma\|$ for all $\gamma \in \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$

Proof of Claim. まず integer $n > 0$ を $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ とる．$\Lambda_0 = \{$ isolated periodic points in $\Omega_K$ with period $\leq 2n+1 \}$ とおき，$\Lambda = \Omega_K - \Lambda_0$ とおく．$\Lambda$ は closed で，int $\Lambda$ ("int" は $\Omega$ の位相に関して) は $\Omega_K$ に属する periodic points with period $\geqq 2n+2$ が dense である．今，$B = \{ \gamma \in \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K} ; \gamma(x) = 0$ for all $x \in \Lambda_0 \}$ とおく。そのとき，

$$\|(f^{\#}-\lambda I)\gamma\| \geqq \varepsilon\|\gamma\| \qquad \text{for all } \gamma \in B,\ |\lambda| = 1$$ である

ことを証明する。もしそうでないとすると，ある $\gamma \in B$，$\|\gamma\| = 1$，$|\lambda| = 1$ に対して，$\|(f^{\#} - \lambda I)\gamma\| < \varepsilon$ となる．$\Lambda$ の periodic point $p$ で，period が $2n+2$ 以上で，$\|\gamma(p)\| > \frac{1}{2}$ となるものが存在する．$p$ の近傍 $W$ を $f^k(W) \cap f^l(W) = \phi$ for $-n \leq k < l \leq n$ と選ぶ．continuous function $\bar{\mu} : W \to [0;1]$ を，$\bar{\mu}(p) = 1$，$\partial W$ の近傍で $\bar{\mu}(x) = 0$ となるものとする．そのとき，continuous function $\mu : M \to [0;1]$ を

(1°) $\mu(x) = 0$ if $x \notin \cup_{i=-n}^{n} f^i(W)$

(2°) $\mu(x) = (1 - |i|/n)\lambda^i \bar{\mu} \circ f^{-i}(x)$ if $x \in f^i(W)$

for some $i$ ; $-n \leq i \leq n$.

とおく．そして，$\eta = \mu\gamma \in B$ とおく．そのとき，

$$\|\eta\| \geqq \|\eta(p)\| = |\mu(p)| \, \|\gamma(p)\| > \frac{1}{2}$$

そして，

$$\begin{aligned} \|f^{\#}(\eta) - \eta\| &= \|(\mu \circ f^{-1}) f^{\#}(\gamma) - \mu\gamma\| \\ &= \|(\mu \circ f^{-1})(f^{\#}(\gamma) - \lambda\gamma) + \lambda(\mu \circ f^{-1})\gamma - \mu\gamma\| \\ &\leq \|f^{\#}(\gamma) - \lambda\gamma\| + \|\gamma\|/n \leqq \frac{3}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

$\|\eta\| > \frac{1}{2}$ だから，$\|f^{\#}(\eta) - \eta\| \lneqq 3\varepsilon\|\eta\|$ これは $\varepsilon$ に対する仮定に反する．よって，$\gamma \in B$，$|\lambda| = 1$ に対して，$\|(f^{\#} - \lambda I)\gamma\| \geqq \varepsilon\|\gamma\|$ となる．次に $B_0 = \{\gamma \in \Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}} ;\ \gamma(x) = 0$ for all $x \in \Lambda\}$ とおくと，$\Gamma_{\Omega_K}^{\mathbb{C}} = B \oplus B_0$．

$\Lambda_0$は有限個のhyperbolic periodic points からなるから，$f^\#$: $B_0 \to B_0$ は hyperbolicである．したがって，$f^\# - \lambda I$ $(|\lambda|=1)$は isomorphismである．よって，ある $\varepsilon_1 > 0$ に対して，$\|(f^\# - \lambda I)\gamma\| \geq \varepsilon_1 \|\gamma\|$ for all $\gamma \in B_0$．そこで $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$ とおくとClaimをうる．(Claimの証明終)．このClaimから$f^\#$ の spectrum $\sigma(f^\#)$ は $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ |\lambda| = 1\}$ と交わらないことが次のようにして示される；仮に $\sigma(f^\#) \cap S^1 \neq \phi$ とすると，$\sigma(f^\#) \not\ni 1$ であるから，$\lambda \in S^1$ で $\sigma(f^\#)$の境界点であるものが存在する $\|(f^\# - \lambda I)\gamma\| \geq \varepsilon' \|\gamma\|$ であるから，$(f^\# - \lambda I)\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ は $\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ の proper closed subspace である．それゆえ，$\gamma_0 \in \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ で $(f^\# - \lambda I)\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}$ との距離 $\delta$ が $> 0$ であるものが存在する．いま，$Q = \{\gamma \in \Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K}\ ;\ \|\gamma\| \leq 2\|\gamma_0\|/\varepsilon'\}$ とおく．そのとき，

(1) もし $|\beta| < \varepsilon'/2$ ならば，

$$\gamma_0 \notin (f^\# - (\lambda+\beta)I)(\Gamma^{\mathbb{C}}_{\Omega_K} - Q)$$

(2) もし $|\beta| < \delta\varepsilon'/2\|\gamma_0\|$ ならば，

$$\gamma_0 \notin (f^\# - (\lambda+\beta)I)Q$$

したがって，$|\beta| < \min(\varepsilon'/2,\ \delta\varepsilon'/2\|\gamma_0\|)$ ならば，$\lambda+\beta \in \sigma(f^\#)$．これは $\lambda$ が $\sigma(f^\#)$の境界点であることに反する．よって，$\sigma(f^\#) \cap S^1 = \phi$．すなわち，$f^\#$ は hyperbolic であ

る．ここで次のTheoremを必要とする．このTheoremは本質的にはMather[4]によって証明された．

Theorem 8. $\pi: E \to \Lambda$ を compact Hausdorff space $\Lambda$ 上の finite dimensional vector bundle とし，$L: E \to E$ を bundle map covering a homeomorphism $g: \Lambda \to \Lambda$ とする．$\Gamma(E)$ を E の $C^0$ sections全体とする．linear transformation $L^{\#}: \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ を $L^{\#}(\gamma)(x) = L \circ \gamma \circ f^{-1}(x)$ $\gamma \in \Gamma(E)$, $x \in \Lambda$ で定義する．そのとき，$L^{\#}$ が hyperbolic ならば，E の subbundle $E^s$, $E^u$ で次の条件をみたすものが存在する．

(1) $E = E^s \oplus E^u$

(2) $E^s$, $E^u$ は $L$-invariant

(3) constants $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ が存在して，

$$v \in E^s \Longrightarrow \| L^n(v) \| \leq C\lambda^n \|v\| \qquad n = 1, 2 \cdots$$

$$v \in E^u \Longrightarrow \| L^{-n}(v) \| \leq C\lambda^n \|v\| \qquad n = 1, 2 \cdots$$

Proof 省略.

さて，Prop1の証明を完結させる．$f^{\#}: \Gamma_{\Omega_K} \to \Gamma_{\Omega_K}$ は hyperbolic であるから，Theorem 8 より，$TM|\Omega_K = E^s_{\Omega_K} \oplus E^u_{\Omega_K}$ と分解される．いま，$K'$ を他の任意の compact invariant set とするとき，$\Omega_K \cap \Omega_{K'}$ において，$E^s_{\Omega_K}$, $E^u_{\Omega_K}$ と $E^s_{\Omega_{K'}}$, $E^u_{\Omega_{K'}}$ がそれぞれ一致することは，hyperbolic splittingの一意性より容易に分る。そこで $TM|\Omega$ のsub-bundles $E^s, E^u$ を $E^s=\bigcup\{E^s_{\Omega_K}$ ; $K$ はcompact invariant set$\}$, $E^u=\bigcup\{E^u_{\Omega_K}$ ; $K$はcompact invariant set$\}$ と定義すれば，この $E^s, E^u$ に関して Axiom A (a) が成り立つ．

(Prop 1 の証明終)

Proof of Prop 2. J. Franks [1] より．$f$ のperiodic pointはすべてhyperbolicであることが分る．いま仮に，ある $\gamma \neq 0 \in \Gamma_{\Omega_K}$ に対して $(I-f^{\#})\gamma=0$ となったとする．$\Omega(f)=\overline{Per(f)}$ であり，$\Omega_K=\overline{\Omega(f)\cap \mathrm{int}\,K}$ であるから，あるperiodic point $p\in\Omega_K$ に対して，$\gamma(p)\neq 0$ となる．前述より，$p$ はhyperbolic periodic pointである．$\Gamma_p$ を $O(p)$ 上のsection全体とする．$f^{\#}:\Gamma_p\longrightarrow\Gamma_p$ はhyperbolicである．ところが $\gamma_0=\gamma|O(p)$ とすると，仮定より．$(I-f^{\#})\gamma_0=0$ ゆえに $\gamma_0=0$ これは $\gamma_0(p)=\gamma(p)\neq 0$ に矛盾する．すなわち，$f^{\#}:\Gamma_{\Omega_K}\rightarrow\Gamma_{\Omega_K}$ はinjectiveである．

(Prop 2の証明終)

Proof of Prop 3. $K\subset M$ を任意のcompact invariant setとする．$\mathcal{N}\subset \mathrm{Diff}^1(M)$ を $f$ の十分小さい近傍とし，$\varphi:\mathcal{N}\cap\Sigma_f(K)\longrightarrow C^0(\Omega(f),M)$ を absolute $\Omega$ stabilityの定義におけるconjugacyとする．$g\in\mathcal{N}\cap\Sigma_f(K)$ に対して，$TM$ の $C^1$ section $\eta$ で，$\mathrm{supp}\,\eta\subset K$,

$g = \exp\eta \circ f$ となるものがとれる．また，$TM|\Omega_K$ における $C^0$ section 全体を $\Gamma_{\Omega_K}$ とおくとき，$\xi \in \Gamma_{\Omega_K}$ で，$\varphi(g)|\Omega_K = \exp\xi$ となるものが存在する．$\varphi(g)\circ f = g\circ\varphi(g)$ であるから，$\Omega_K$ において，

(*) $\quad \exp\xi = \exp\eta \circ f \circ \exp\xi \circ f^{-1}$

となる．

次の Lemma は容易に証明できる．[5]

Lemma 5．$f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ とし，$K$ を $f$ の compact invariant set とする．そのとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の条件をみたす $\delta > 0$ がとれる；$\Lambda$ を $K$ に含まれる任意の compact invariant set とし，$\xi$ を $TM|\Lambda$ の $C^0$ section とする．また $\eta$ を $TM$ の $C^1$ section で $\mathrm{supp}\,\eta \subset K$ となるものとする．そのとき，$\|\xi\|_0 < \delta$，$\|\eta\|_1 < \delta$ ならば，

(1) $\quad \| f\circ\exp\xi\circ f^{-1} - \exp(f^{\#}\xi)\|_0 < \varepsilon\|\xi\|_0$

(2) $\quad \|\exp\eta\circ\exp\xi - \exp(\xi+\eta)\|_0 < \|\eta\|_1\|\xi\|_0 + \varepsilon\|\xi\|_0 + \varepsilon\|\eta\|_0$.

さて，この Lemma を(*)に適用すると，

(☆) $\quad \eta = (I - f^{\#})\xi + P(\xi, \eta)$

ここで，定義域は $\Omega_K$ であり，$\|P(\xi,\eta)\| < \varepsilon(\|\xi\|_0 + \|\eta\|_0) + \|\eta\|_1\|\xi\|_0$ である．$(I - f^{\#})\Gamma_{\Omega_K}$ が $\Gamma_{\Omega_K}$ において，dense であることをいえば，Open mapping theorem ( Loomis [ ] p17. Lemma 1) より $I - f^{\#} : \Gamma_{\Omega_K} \to \Gamma_{\Omega_K}$ が surjective であることが分る．さて，compact invariant set $K'$ を，$K \subset \mathrm{int}\, K'$ ととり，これまで$K$に対して行なった議論を$K'$に対して行なう．とくに，評価式(☆) は$K'$に対するものとする．いま，$\Gamma^1_{K'} = \{$ TM の $C^1$ section $\eta$ で $\mathrm{supp}\,\eta \subset K'$ なるもの全体$\}$ とおく．$R : \Gamma^1_{K'} \to \Gamma_{\Omega_K}$ を $R(\eta) = \eta | \Omega_K$ ($\eta \in \Gamma^1_{K'}$) で定義する．$R$の imageは $\Gamma_{\Omega_K}$ において dense である．そこで，$\Gamma_{\Omega_K}$ の任意の open set $\mathcal{U}$に対して，$\eta \in \Gamma^1_{K'}$ $R(\eta) \in \mathcal{U}$ となるものが存在する．$t > 0$ を十分小さくとると，$\xi_t \in \Gamma_{\Omega_{K'}}$ が存在して

$$t\eta = (I - f^{\#})\xi_t + P(\xi_t, t\eta)$$

absolute $\Omega$ stability の定義より，$\|\xi_t\|_0 < C\|t\eta\|_0$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\|P(\xi_t, t\eta)\|_0 &\le \frac{1}{t}\left(\varepsilon\|\xi_t\|_0 + \varepsilon t\|\eta\|_0 + \|t\eta\|_1\|\xi_t\|_0\right) \\ &\le \frac{1}{t}\left(\varepsilon t C\|\eta\|_0 + \varepsilon t\|\eta\|_0 + t^2 C\|\eta\|_1\|\eta\|_0\right) \\ &= \varepsilon C\|\eta\|_0 + \varepsilon\|\eta\|_0 + tC\|\eta\|_1\|\eta\|_0\end{aligned}$$

それゆえ，$t \to 0$ のとき，$(I - f^{\#})(1/t\ \xi'_t) \longrightarrow R(\eta)$

ここで，$\xi'_t = \xi_t | \Omega_K$ とおく．したがって，$t$ が十分小さいとき，$(I - f^{\#})(1/t\ \xi'_t) \in \mathcal{U}$, $\|1/t\ \xi'_t\| < C\|\eta\|_0$ をうる．これをもって，Prop 3の証明は完成する．

Proof of Theorem 7. Theorem 6, [7], Lemma 4 より自明．

## References

[1] J. Franks Necessary Conditions for Stability of Diffeomorphisms Trans. Amer. Math. Soc. vol 158 1971 301-308

[2] J. Franks Differentiably $\Omega$-Stable Diffeomorphisms. Topology vol 11 1972 107-113

[3] J. Guckenheimer Absolutely $\Omega$ Stable Diffeomorphisms Topology vol 11 1972 159-197

[4] J. Mather Characterization of Anosov Diffeomorphisms Indag Math 30 1968

[5] J. Moser On a Theorem of Anosov. J. Diff. Equations 5 1969 411-440

[6] Z. Nitecki Differentiable Dynamics MIT

[7] J. Palis A Note on $\Omega$-Stability in Global Analysis Pure Symp Pure Math 14

[8] S Smale Differentiable Dynamical Systems Bull Amer Math Soc 73 1967 747-817

[9] S. Smale The $\Omega$ Stability Theorem in Global Analysis. Proc. Symp. Pure Math 14

[10] Loomis Abstract Harmonic Analysis