数理解析研究所講究録
284巻 1976年 41-47

微分同相写像のattractorについて

日大理工　　松元重則

本報告の最初の部分は　公理A微分同相写像の吸引(attractive)基本集合に関してであり [1], [2], [3]の抄録である。　第二部で上田睆亮氏他の所謂不規則遷移振動についての注意をのべる。

Kを1次元compact branched C^∞-多様体とし，$\partial K=\emptyset$とする。　$g: K\to K$が<u>admissible</u>であるとは，1) gはexpanding C^∞-写像であり　2) $\Omega(g)=K$,　3) $K\ni {}^\forall x$, ${}^\exists I$, nbd of x ∍ $g(I)$はarcであることとする。　このとき $\Sigma := \lim\mathrm{inv}\{K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} \cdots\}$を (K, g)の<u>solenoid</u>と呼び，　$G: \Sigma\to\Sigma$, 但し $G(x_0, x_1, \cdots) = (gx_0, x_0, x_1, \cdots)$を<u>shift map</u>と呼ぶ。

<u>命題</u>　Σは局所的に Cantor set × Ｉと同相であり，Gは同相写像である。

いまMをn次元compact C^∞ mfdで縁なしとする。fをM上のC^r級公理A微分同相写像とする。($r \geq 1$)
また Λを$\Omega(f)$のひとつの基本集合とする。Λが吸引基本集合であるとは $W^u(\Lambda)=\Lambda$ なることとする。このとき

<u>定理1</u>([1]) 一次元吸引基本集合はすべて solenoid の shift map と位相共役である。

逆に

<u>定理2</u>([1]) solenoid の shift map はすべて、S^4の公理A微分同相の吸引基本集合と位相共役である。

また shift map は次のように分類される。

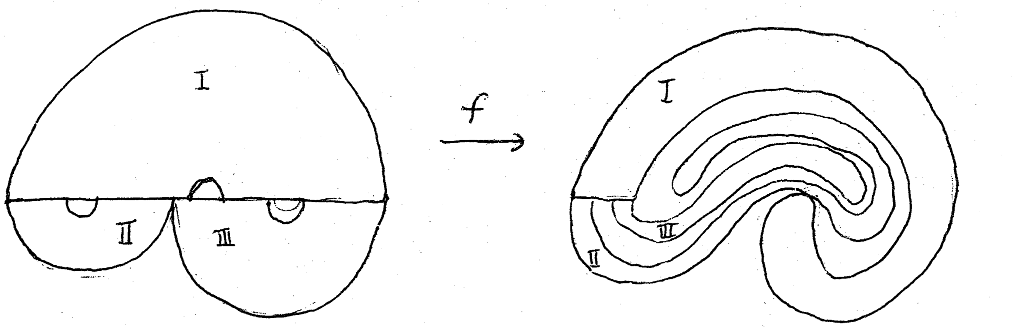
<u>定理3</u>([2]) $K_i \xrightarrow{g_i} K_i$ を admissible 写像としてg_iの定める shift map を $\Sigma_i \xrightarrow{G_i} \Sigma_i$ とする。($i=1,2$)
このとき G_1とG_2が位相共役である為の同値条件は、

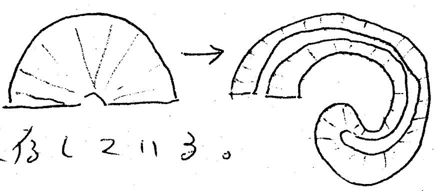
$$^\exists f : K_1 \to K_2,\quad ^\exists f' : K_2 \to K_1,\quad ^\exists m \geq 0 \ni$$

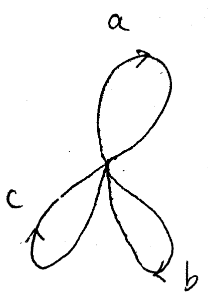
$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & K_1 \arrow[d, "f"] \\ K_2 \arrow[r, "g_2"] & K_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "g_1"] & K_1 \\ K_2 \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "g_2"'] & K_2 \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_1 \arrow[r, "g_1^m"] \arrow[d, "f"'] & K_1 \arrow[d, "f"] \\ K_2 \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "g_2^m"'] & K_2 \end{tikzcd}$$

がすべて可換。

例([3])



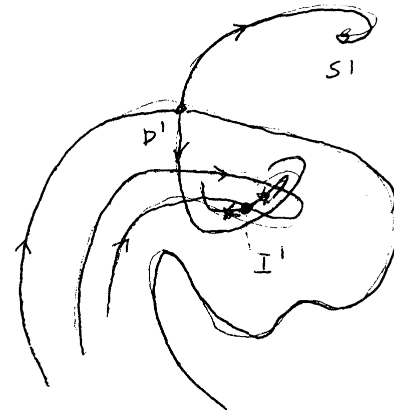
たゞしIの領域は精確には  のように写像されてあり、fiberを保存している。
また fiber方向には contractive であり 心棒方向には expanding である。領域II, III についても同様である。
I, II, III の同心円の中心は、固定点であり、source である。無限遠点を source と思うことにより、これを S^2 上の微分同相に拡張する。この微分同相は、公理Aをみたし、1次元吸引基本集合をもつ。従って定理1により、shift map が対応するが、それは次の様に与えられる。(admissible map が次で与えられる。)



$$a \longrightarrow a+b+a-b-a$$
$$b \longrightarrow -c+a+b-a+c$$
$$c \longrightarrow -c+a-b-a+c+a+b-a+c$$

この例は、かなり複雑であり、やや人工的である。もっと単純な例もあるが、それらを、~~二次元多様体~~ S^2 上の公理A微分同相写像の基本集合として実現することはできない。つまり S^2 上の吸引基本集合（一次元）は少なくとも、このくらいは複雑になってしまうということである。

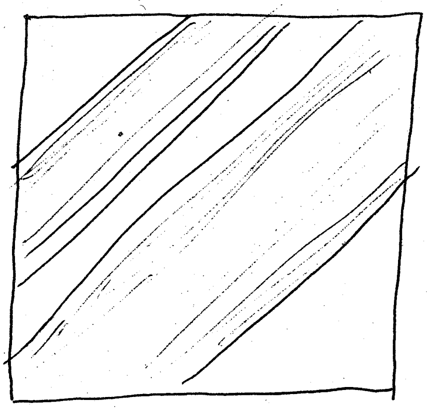
次に、上田氏の実験結果に現われた極めて解析の困難な attractor についてのべよう。彼は、いくつもの例を提出してあり、それらすべてには共通のある複雑さを有している。それらの中で一番単純なものが、以下の phaze portrait をもつものである。詳細は[4]を見られたい。この例の眼目は、一次元状の attractor が、存在していることである。上田氏の詳細な観察によれば、この微分同相 ~~attractor~~ は、摂動に対し、Ω-連続ではあるらしいが、Ω-安定ではないらしいとのことである。([5])



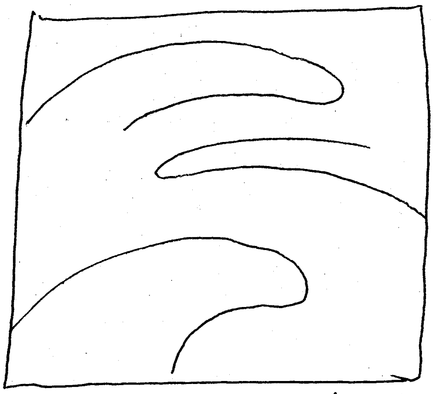
Ω-連続，Ω-安定の定義は文末にのべておくことにする。

このattractorは、一見一次元のようにみえるらしいが、

実は、前述の例とは甚だ異なった特徴をもっている。それは、前述の例では、不安定多様体が左図のごときであるのに対し、上田氏の例では右図のごときである点である。



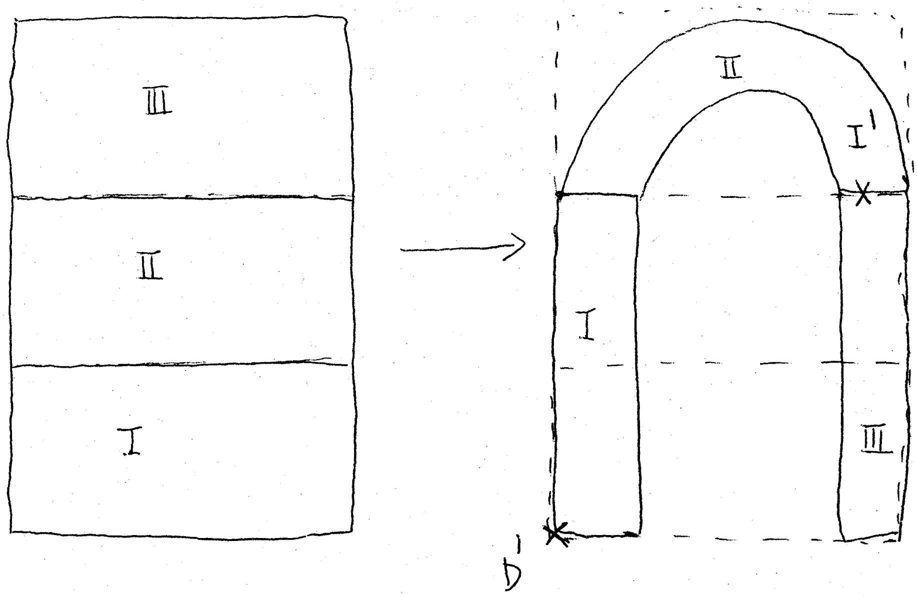
Plykin の例



上田氏の例

つまり上田氏の例では、不安定多様体は無数の「折れ曲り点」をもっているのである。（従ってとくに折れ曲り点の集積点もある。） 他方 Plykin の例のごとき、公理A写像の1次元 attractor は、一般に（局所的には）近傍へ foliation として拡張されるような不安定多様体をもっていることを示すことができるのである。従って上田氏の例は公理A写像の1次元 attractor ではない。（恐らく公理Aではないだろう）

この例と極めて似通った（恐らくは同一の）phase portrait をもつ例を初等的に構成することができる。



それは上図で与えられる微分同相である。（像の磁石を厚くするとMorse Smaleになってしまう。上の絵のくらいの厚さにしておく。） 磁石の厚さを変えると，それに従いphase portraitは少しずつ変化するが，適当な厚さにとると上田氏の例とよく似たものを得る。また この図の微分同相写像を経由するところの 南極北極 と 馬テイ を結ぶ1径数族をつくることができる。 私の見るところ この1径数族の研究は 力学系の分岐の研究の中で最重要なもののひとつではないかと思はれる。 又，次の予想にはいくらかの根拠がある。（あまり強くはないが）

予想 上にのべた微分同相は無限コのsinkをもつ。sinkとは，巡回点で，1次近似の行列 ~~contractible~~ の固有値が1より小さいもののことである。

<u>附録</u>　Mを多様体とし，$\mathrm{Diff}^r(M)$で，M上の微分同相の集合を表わす。（C^r-topologyをもたせておく。）$f \in \mathrm{Diff}^r(M)$が<u>Ω-安定</u>であるとは　fの近傍Nがあり，Nの各元gに対し，次の図式が可換となるような同相写像hが存在することとする。

$$\begin{array}{ccc} \Omega(f) & \xrightarrow{f|} & \Omega(f) \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ \Omega(g) & \xrightarrow[g|]{} & \Omega(g) \end{array}$$

また，fが<u>Ω-連続</u>であるとは (1) $\Omega(f) \ni {}^\forall x$，$x \in {}^\forall U$（近傍）に対し，適当な nbd N of f が存在して $N \ni g$ ならば　$\Omega(g) \cap U \neq \emptyset$　(2) $\Omega(f) \subset {}^\forall U$ に対し 適当な nbd N of f が存在して $N \ni g$ ならば $\Omega(g) \subset U$.

文献表

[1] R. Williams, "One dimensional attractors," Topology 6.

[2] ——, "Classification of 1-dim attractors," Proc. AMS 14.

[3] Plykin, "Sources and sinks of A-diffeo of surfaces," Sbornik 93-2

[4] 上田 et al, "非線型微分方程式の計算機シミュレーションと非周期振動," Trans IECE 73/4 Vol 56-A No 4.

[5] 上田 et al "非線型振動からの問題提起2件" This volume