数理解析研究所講究録
285巻 1976年 112-121

完全n組グラフのパータイト・クロー分解について

広島経済大　田沢新成
新居浜高専　潮　和彦
広島大・計算センター　池田秀人
広島大・理　山本純恭

§1. はじめに

m項目についてn水準のレコードに対して2項目質問の全体を考える。レコード分布が一様のとき，c個の2項目質問に対応するバケツが最小の冗長率をもつのはそのバケツのグラフ構造がc－パータイト・クローのときかつそのときに限る[1]. ここでc－パータイト・クローというのは，1項目質問に対応する点を根とするc－クローのうち，そのc個の葉がc個の異なった項目にまたがっているものをいう。c－パータイト・クローの線の集合をP_cとかく。ただし$c \geq 2$とする。

2項目質問の全体をそのような最小の冗長率をもつバケツに対応する質問の集合で分割して得られる多値レコードに対する均衡型ファイル方式HUBMFS_2[2]を構成することは完

全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$をc－パータイト・クローに分解することに対応する。

§2. 分解可能の必要条件

定義　完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$ ($m\geq 2, n\geq 2$)の線の全体からなる集合E ($|E|=\binom{m}{2}n^2$)が

$$E=\bigcup_{\alpha=1}^{b}P_c^{(\alpha)} \quad ; \quad P_c^{(\alpha)}\cap P_c^{(\beta)}=\phi \ (\alpha\neq\beta)$$

と表わされるとき，$K_m(n,\cdots,n)$はc－パータイト・クロー分解可能であるという。

定理1　完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$がc－パータイト・クロー分解可能であるための必要条件は次の２つがともに成立することである。

(i) $\binom{m}{2}n^2$がcの倍数。

(ii) nが偶数のとき$m\geq c+1$，nが奇数のとき$m\geq c+2$。

証明　(i)は明らかに必要。(ii)はc－パータイト・クローが存在するためにはnが偶数，奇数を問わず$m\geq c+1$は必要。nが奇数，$m=c+1$のとき，分解可能とする。点集合$V_i=\{v_{ik}\,|\,k=1,2,\cdots,n\}$ ($1\leq i\leq m$)の点v_{ik}が$y_k^{(i)}$回パータイト・クローの根であったとする。v_{ik}に接合する線と，v_{il} ($k\neq l$)に接合する線が同じパータイト・クローに属することなく，また$m-1=c$であるから，

V_iに属さない点を根とするパータイト・クローにはV_iの点と接合する線が1本かつただ1本ある。従って，各点の次数が$(m-1)n$で，$K_m(n,n,\cdots,n)$が$\binom{m}{2}n^2/c$個のc－パータイト・クローに分解可能ということから，

$$\sum_{k=1}^{n}\{(m-1)n-y_k^{(i)}c\}+\sum_{k=1}^{n}y_k^{(i)}=\binom{m}{2}n^2/c$$

でなければならない。従って$2\sum_{k=1}^{n}y_k^{(i)}=n^2$を得る。これは$n$が奇数ということに矛盾する。それ故，$n$が奇数のときは$m\geq c+2$が必要である。

nが偶数で$m=c+1$のときの分解可能性が系8で与えられる。nが奇数で$m=c+2$のとき，たとえば$(m,n,c)=(5,3,3),(7,5,5),(8,3,6)$の場合について実際$c$－パータイト・クロー分解可能であるから，必要条件は十分タイトである。

§3．パータイト・クロー分解

完全m組グラフ$K_m(n,n,\cdots,n)$のmn個の点をv_{ik} $(i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)$とし，2点間の隣接関係に適当な方向を与え，その隣接関係を与える$mn\times mn$の隣接行列を

$$M=\|m_{ik,jl}\| \qquad i,j=1,2,\cdots,m;\ k,l=1,2,\cdots,n$$

$$m_{ik,jl}=\begin{cases}1 & v_{jl}\text{が}v_{ik}\text{に隣接しているとき}\\ 0 & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

とする。ただし，$ik=(i-1)n+k$とする。Mはm^2個の$n\times n$の部分

行列 $M_{ij}=\|m_{ik,jl}\|$ $k,l=1,2,\cdots,n$ をもち，

$$m_{ik,il}=0\text{，したがって }M_{ii}=0$$

$$m_{ik,jl}+m_{jl,ik}=1\quad(i\neq j)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}m_{ik,jl}=\binom{m}{2}n^2$$

をみたしている。

Mの ik 行にある c 個の1の集合は v_{ik} を根とする c ークローに対応し，異った $M_{ij_1},M_{ij_2},\cdots,M_{ij_c}$ のそれぞれから1つづつとった c 個の1の集合は v_{ik} を根とする c ーパータイト・クローに対応している。したがって，$K_m(n,n,\cdots,n)$ の c ーパータイト・クロー分解は適当に方向を与えた隣接行列 M を求め，すべての1を c ーパータイト・クローの条件をみたす c 個づつの集合に分割することである。

補題2　$K_m(n,n,\cdots,n)$ が c ーパータイト・クロー分解可能であるための必要十分条件は，a_{ik} $(i=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n)$ を正の整数とするとき，適当に方向づけた $K_m(n,n,\cdots,n)$ の隣接行列 M が存在して，

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}m_{ik,jl}=a_{ik}c\qquad i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n\tag{3.1}$$

$$\sum_{l=1}^{n}m_{ik,jl}\leq a_{ik}\qquad i,j=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n\tag{3.2}$$

をみたすことである。

証明　各 ik 行の1が c ーパータイト・クローに対応する a_{ik} 組の1の集合に分割されたとすると明らかに(3.1)(3.2)をみたさなければならない。逆に(3.1)(3.2)をみたすとき，$a_{ik}c$ 個の1を

c 個づつ a_{ik} 組の 1 の集合に分け，それぞれを c－パータイト・クローに対応させることができることを示せばよい。いま $\sum_{l=1}^{n} m_{ik,jl}=s_j\ (j=1,2,\cdots,m)$，$a_{ik}=a$ とする．(3.2) から $\max s_j \leq a$ である。従って，行和および列和がそれぞれ $(c,c,\cdots,c)$，$(s_1,s_2,\cdots,s_m)$ となる $a\times m$ の 0-1 行列が存在する [3],[4],[5]. 上のことは，$M_{i1},M_{i2},\cdots,M_{im}$ の ik 行から高々 1 ツづつ 1 を選び c－パータイト・クローに対応する c 個の 1 の集合を a_{ik} 組作ることができることを示している。

定理 3　$m\geq 2c+1$ のとき，必要条件(i)をみたすならば，$K_m(n,n,\cdots,n)$ は c－パータイト・クロー分解可能である。

証明　$\binom{m}{2}n^2/c = mna+r\ (0\leq r<mn)$ と書ける。$a_{ik}=a+1\ (ik=1,2,\cdots,r)$，$a_{ik}=a\ (ik=r+1,r+2,\cdots,mn)$ におく。文献[6]の定理 3 の証明の中から，(3.1) をみたす隣接行列 M が存在することがわかる。$m\geq 2c+1$ から，$a\geq n$ である。それ故，M は (3.2) をみたす。補題 2 より求める結論を得る。

定理 4　$c\,|\binom{m}{2}n$ かつ $c+\varepsilon\leq m\leq 2c$ (n が偶数ならば $\varepsilon=1$，n が奇数ならば $\varepsilon=2$) のとき，$\binom{m}{2}n^2/c = mna+bn\ (0\leq b<m)$ として，$2a\geq n$ ならば $K_m(n,n,\cdots,n)$ は c－パータイト・クロー分解可能である。

証明には，補題 5, 6, 7 を必要とする。

補題 5　β_1,β_2,b は $\beta_1\geq n/2,\ \beta_2\geq n/2,\ 0\leq b<m$ をみたす整数とし，α_i は

$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\binom{m}{2}n$ かつ $\alpha_1\ge\alpha_2\ge\cdots\ge\alpha_b\,;\,\alpha_{b+1}\ge\alpha_{b+2}\ge\cdots\ge\alpha_m$ をみたす整数とする。このとき，

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij}=\alpha_i \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{3.3}$$

$$y_{ii}=0 \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{3.4}$$

$$y_{ij}+y_{ji}=n \qquad i,j=1,2,\cdots,m\ (i\neq j) \tag{3.5}$$

$$y_{ij}\le\beta_1 \qquad i=1,2,\cdots,b\,;\ j=1,2,\cdots,m \tag{3.6}$$

$$y_{ij}\le\beta_2 \qquad i=b+1,b+2,\cdots,m\,;\ j=1,2,\cdots,m \tag{3.7}$$

をみたす $m\times m$ 整数行列 $Y=\|y_{ij}\|$ が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^{p_1}\alpha_i+\sum_{i=b+1}^{b+p_2}\alpha_i\le\frac{np(p-1)}{2}+\beta_1 p_1(m-p)+\beta_2 p_2(m-p) \tag{3.8}$$

がすべての $p=1,2,\cdots,m$ および $0\le p_1\le b,\ 0\le p_2\le m-b$ をみたす p の分割 $p=p_1+p_2$ について成立することである。

証明　m 個の点の集合 $N=\{1,2,\cdots,m\}$ と $\binom{m}{2}$ 本の線の集合 $A=\{(i,j)\,|\,i<j\}$ で定義されるネットワーク $[N;A]$ を考える。A 上で定義される整数値関数 $f(i,j)$ が存在して，$u_i=\beta_1,\ i=1,2,\cdots,b,\ u_i=\beta_2,\ i=b+1,b+2,\cdots,m$ とするとき

$$\sum_{j>i}f(i,j)+\sum_{j<i}(n-f(j,i))=\alpha_i \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{3.9}$$

$$f(i,j)\le u_i \quad \text{かつ} \quad n-f(i,j)\le u_j \qquad (i,j)\in A \tag{3.10}$$

をみたすならば $i<j$ に対しては $y_{ij}=f(i,j)$，$i>j$ に対しては $y_{ij}=n-f(j,i)$ とおき，さらに $y_{ii}=0$ とおけば(3.3)～(3.7)をみたす行列 Y がえられる。逆に Y が存在すれば A 上で定義される(3.9)(3.10)をみたす整数値関数 $f(i,j)$ が存在する。

$$g(i,j)=f(i,j)-n+u_j \tag{3.11}$$

と書くと

$$0 \leq g(i,j) \leq c(i,j), \qquad c(i,j) = u_i + u_j - n \tag{3.12}$$

である。(3.9) から

$$\sum_{j>i} g(i,j) - \sum_{j<i} g(j,i) = \alpha_i + \sum_{j>i} u_j - u_i(i-1) - n(m-i) \tag{3.13}$$

を得る。逆に (3.12)(3.13) をみたす整数値関数 $g(i,j)$ が存在するならば (3.11) を通して (3.9)(3.10) をみたす $f(i,j)$ が存在する。$S(\subseteq N)$ と $T=\bar{S}$ (Sの補集合) を $S=\{i \mid \alpha_i + \sum_{j>i} u_j - u_i(i-1) - n(m-i) \geq 0\}$ で定義し，$s(i) = \alpha_i + \sum_{j>i} u_j - u_i(i-1) - n(m-i)$ $i \in S$，$d(i) = -\alpha_i - \sum_{j>i} u_j + u_i(i-1) + n(m-i)$ $i \in T$ と書くと，$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \binom{m}{2} n$ であるから，$\sum_{i \in S} s(i) = \sum_{i \in T} d(i)$ である。

integrity theorem [7] および feasible theorem [7], [8] により

$$\sum_{j>i} g(i,j) - \sum_{j<i} g(j,i) = s(i) \qquad i \in S \tag{3.14}$$

$$\sum_{j<i} g(j,i) - \sum_{j>i} g(i,j) = d(i) \qquad i \in T \tag{3.15}$$

$$0 \leq g(i,j) \leq c(i,j) \qquad (i,j) \in A \tag{3.16}$$

をみたす整数値関数 $g(i,j)$ が存在するための必要十分条件は，任意の $X \subseteq N$ に対し，

$$\sum_{i \in T \cap \bar{X}} d(i) - \sum_{i \in S \cap \bar{X}} s(i) \leq \sum_{i \in X,\, j \in \bar{X}} c(i,j) \tag{3.17}$$

が成立することである。($\bar{X}=N$ のとき等号成立)

$X_\alpha = \{i \mid \in X, u_i = \beta_\alpha\}$, $X'_\alpha = \{i \mid \in \bar{X}, u_i = \beta_\alpha\}$, $\alpha = 1,2$ とし，$\beta = \beta_1 - \beta_2$ として，(3.17) は

$$-\beta_2\{(|(\bar{X},X)| + |(X,\bar{X})|) + |(\bar{X},\bar{X})|\} - \beta\{(|(X'_1,X_1)| + |(X_1,X'_1)|) + |(X'_1,X'_1)|\}$$

$$+(\beta_2 - n)\{\sum_{i \in \bar{X}} i - |(X,\bar{X})|\} + \beta\{\sum_{i \in X'_1} i - |(X_1,X'_1)|\} - \beta\{|(X_1,X'_2)| + |X'_1|\}$$

$$-(\beta_2 - mn)|\bar{X}| \leq \sum_{i \in \bar{X}} \alpha_i \tag{3.18}$$

と同値である。ここに $(A,B)=\{(x,y)\mid \in A, x\in A, y\in B\}$ である。$|X|=p$, $|X_\alpha|=p_\alpha$, $\alpha=1,2$ として、(3.18) は

$$\frac{(m-p)(m+p-1)n}{2}-\beta_1 p_1(m-p)-\beta_2 p_2(m-p)\leq\sum_{i\in X}\alpha_i \tag{3.19}$$

と同値である。(3.19) に対し $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\binom{m}{2}n$ を用いると

$$\sum_{i\in X}\alpha_i\leq\frac{np(p-1)}{2}+\beta_1 p_1(m-p)+\beta_2 p_2(m-p) \tag{3.20}$$

が得られる。(3.20) の右辺は p, p_1, p_2 のみに依存したものであるから、左辺を最大にするような集合 $X=\{1,2,\cdots,p_1, b+1, b+2,\cdots,b+p_2\}$ をとることによって、(3.3)〜(3.7) をみたす必要十分条件 (3.8) がえられる。

注意　$\beta_1=\beta_2=n$ の場合は文献[7]で与えられている。

補題6　Y は (3.3)〜(3.7) をみたす $m\times m$ 整数行列とする。このとき、$\frac{n}{2}\leq\beta_1\leq n$, $\frac{n}{2}\leq\beta_2\leq n$ ならば

$$\sum_{l=1}^{n} m_{ik,jl}=y_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,m\ ;\ k=1,2,\cdots,n \tag{3.21}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_{ik,jl}=y_{ij} \qquad i,j=1,2,\cdots,m\ ;\ l=1,2,\cdots,n \tag{3.22}$$

をみたす $n\times n$ の 0-1 行列 $M_{ij}=\| m_{ik,jl}\|$ が存在する。

証明　$y_{ij}\leq n$ であるから、Ryser 定理 [3], [4], [5] より明らか。

補題7　$\alpha_1=\cdots=\alpha_b=(a+1)c$, $\alpha_{b+1}=\cdots=\alpha_m=ac$ とする。このとき、

1° n が偶数のとき、$b=0$ ならば $\beta_1=\beta_2=\frac{n}{2}$, $b\neq 0$ ならば $\beta_1=\frac{n}{2}+1$, $\beta_2=\frac{n}{2}$

2° n が奇数のとき、$b=0$ ならば $\beta_1=\beta_2=\frac{n+1}{2}$, $b\neq 0$ ならば $\beta_1=\frac{n+3}{2}$, $\beta_2=\frac{n+1}{2}$

として (3.3)〜(3.7) をみたす $m\times m$ 整数行列 Y が存在する。

証明　(3.8) の成立を示すことで証明を終る。

$$S_{p_1p_2}=\frac{np(p-1)}{2}+\beta_1p_1(m-p)+\beta_2p_2(m-p)-\sum_{i=1}^{p_1}\alpha_i-\sum_{i=b+1}^{b+p_2}\alpha_i$$

$$=\frac{np(p-1)}{2}+\beta_1p_1(m-p)+\beta_2p_2(m-p)-(a+1)cp_1-acp_2$$

$$=p_1\left(\beta_1-\frac{n}{2}\right)(m-p_1-p_2)+p_2\left(\beta_2-\frac{n}{2}\right)(m-p_1-p_2)+\frac{bc}{m}p_1+\frac{bc}{m}p_2-cp_1$$

$b=0$ のときは明らかに $S_{p_1p_2}\geq 0$ である。$b\neq 0$ のときは $\beta_1\geq\frac{n}{2}+1$ であるから，

$$S_{p_1p_2}\geq p_1(m-p_1-p_2)+\frac{bc}{m}p_1+\frac{bc}{m}p_2-cp_1$$

$$=p_1(m-b-p_2)\left(1-\frac{c}{m}\right)+\left(p_1+\frac{cp_2}{m}\right)(b-p_1)\geq 0$$

したがって，Y が存在する。

定理4の証明　補題7により $m\times m$ の整数行列 $Y=\|y_{ij}\|$ が存在する。Y を用いて隣接行列 M を求める。$i>j$ に対しては，$\frac{n}{2}\leq\beta_1\leq n$，$\frac{n}{2}\leq\beta_2\leq n$ から，補題6により (3.21) (3.22) をみたす M の $n\times n$ の ij 部分行列 $M_{ij}=\|m_{ik,jl}\|$ が与えられる。$i<j$ に対しては，$m_{jl,ik}=1-m_{ik,jl}$ として M の $n\times n$ の ji 部分行列 $M_{ji}=\|m_{jl,ik}\|$ を定義すると，$y_{ij}+y_{ji}=n$ から，M_{ji} は (3.21), (3.22) をみたすことがわかる。もちろん $y_{ii}=0$ に対しては $M_{ii}=\|m_{ik,il}\|=0$ である。さて，$a_{ik}=a+1$ $(i=1,2,\cdots,b;k=1,2,\cdots,n)$，$a_{ik}=a$ $(i=b+1,b+2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n)$ とすれば隣接行列 M は (3.1) をみたすことがわかる。$a\geq\frac{n}{2}$ から，β_1,β_2 のとり方により，(3.2) は明らかに成立。補題2から，定理4の結論を得る。

<u>系8</u>　n が偶数で，$m=c+1$ のとき，$K_m(n,n,\cdots,n)$ は c ーパー

タイト・クロー分解可能である。

証明　$a=\frac{n}{2}$ であるから，定理4より明白。

必要条件(i)をみたし，$c+\varepsilon \le m \le 2c$ かつ $c \nmid \binom{m}{2}n$ の分解問題が残っているが恐らく可能であろう。

参考文献

[1] 潮和彦，田沢新成，池田秀人，山本純恭(1976)完全m組グラフのパータイト・クロー分解，日本数学会年会応用数学分科会講演予稿集，46-53

[2] 潮和彦，田沢新成，池田秀人，浜田昇，山本純恭(1975)多値レコードに対する均衡型ファイル方式($HUBMFS_2$)について，情報処理学会昭和50年度第16回大会講演論文集 69-70

[3] Ryser, H.J.(1957), Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, Canad. J. Math. 9, 371-377

[4] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N.(1975), Design of a new balanced file organization scheme with the least redundancy, Information and Control 28, 156-175

[5] Yamamoto, S., Ikeda, H., Shige-eda, S., Ushio, K. and Hamada, N.(1975), On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, Hiroshima Math. J. 5, 33-42

[6] 潮和彦，田沢新成，山本純恭(1976)，完全m組グラフのclaw分解について，京都大学数理解析研究所共同研究集会「デザインの構成法および不存在性」予稿集

[7] Ford, L.R. Jr. and Fulkerson, D.R.(1962), Flows in networks, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[8] Gale, D.(1957), A theorem on flows in networks, Pacific J. Math. 7, 1073-1082