

ある PBIB design の特徴づけ

広島大 教育 景山三平  
 。 理 辻 卓見

§ 0. 序

PBIB design においてよく知られている不等式  $b \geq v - d$ .  
 ( $d$ :  $NN'$  の零固有根の重複度.  $N$ : 結合行列) 及び,  $\mu$ -  
 resolvable PBIB design における不等式  $b \geq v + t - 1 - d$ . の  
 等号が成立するときの条件を  $NN'$  のスペクトル分解を用いて  
 特徴づける。さらに いろいろな PBIB design のブロック構  
 造をブロックと association scheme との関連において特徴  
 づける。なお, PBIB design の  $NN'$  のスペクトル分解につい  
 ては石井 [2] を参照。

§ 1. ブロックデザインの不等式

1.1. パラメーター  $v, b, r, k$  ( $v > k$ ) の block design  
 の結合行列を  $N$  とすれば,  $NN'$  は半正値対称で非負行列とな

り,  $E_{axi}$  ( $E_{axb}$ :  $a \times b$  行列ですべての要素が 1, 特に  $E_{axa} = G_a$  とかく) を固有根  $r_k$  に対応する固有ベクトルにもつ。したがって

$$NN' = r_k \frac{1}{b} G_a + \sum_{i=1}^l \rho_i P_i + 0 P_0. \quad (1.1)$$

とスペクトル分解できる (ここで,  $\rho_i \neq \rho_j, i \neq j, r_k \geq \rho_i > 0, l$ : 適当な正整数,  $P_0$  は零行列の時もある)。本稿での design はすべて連結とする (したがって  $r_k > \rho_i, i=1, 2, \dots, l$ )。

$d_i = \text{rank } P_i, i=0, 1, \dots, l$  とおけば,  $NN'$  と  $N'N$  の 0 でない固有根は重複度まで含めて一致すること, 及び  $E_{axi}$  は  $r_k$  を固有根とする  $NN'$  の固有ベクトルであるから

$$N'N = r_k \frac{1}{b} G_b + \sum_{i=1}^l \rho_i Q_i + 0 Q_0. \quad (1.2)$$

とスペクトル分解でき,  $\text{rank } Q_i = d_i, i=1, 2, \dots, l$  となる。したがって, 不等式

$$b \geq v - d_0. \quad (1.3)$$

が成立する。さらに等号が成立するときは

$$\frac{1}{b} G_b + \sum_{i=1}^l Q_i = I_b \quad (\text{又は } \sum_{i=1}^l Q_i = I_b - \frac{1}{b} G_b) \quad (1.4)$$

である。特に  $l=1$  の時 次をえる。

【定理 1.1】 パラメータ  $v, b, r, k$  の block design において, 任意の二つのブロックの共有数が一定のための必要十分条件は,  $l=1$  かつ  $b=v-d_0$  である。

証明 (必要) フロック共有数が等しいとき  $N'$  は BIB

design であるから、よく知られた関係式  $\theta = \frac{r(r-1)}{b-1}$  ( $\theta$ : フロック共有数) から

$$N'N = N'(N)' = (r-\theta)I_b + \theta G_b = r\frac{1}{b}G_b + (r-\theta)(I_b - \frac{1}{b}G_b)$$

とスペクトル分解できる。よって  $l=1$  となり、また

$$\text{rank}(\frac{1}{b}G_b) + \text{rank}(I_b - \frac{1}{b}G_b) = b$$

より  $b = v - d_0$  をえる。

(十分)  $b = v - d_0$  と  $l=1$  より (1.4) が成立して

$$Q_1 = I_b - \frac{1}{b}G_b \text{ となる。したがって}$$

$$N'N = r\frac{1}{b}G_b + \rho_1(I_b - \frac{1}{b}G_b)$$

となり、これはフロック共有数が等しい事を意味する。

(証明おわり)

注1) 定理 1.1 は本質的には Shah [4] によって得られたものと一致する。

注2)  $\theta = \frac{r(r-1)}{b-1}$  は整数でなければならない。

注3)  $N$  が BIB design の時、定理 1.1 は symmetric BIB design ( $v=b$ ) のよく知られた特徴づけを示している。

定理 1.1 はいろいろな PBIB design に適用できるが、ここでは一つだけ挙げる。

[系] 2-associate triangular PBIB design ( $v = \frac{n(n-1)}{2}$ ,  $b, r, k, \lambda_1, \lambda_2$ ) において  $r - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  の時、任意の二つのフロックの共有数が一定であるための必要十分条件は、

$b = n$  で  $k(r-1)/(n-1)$  が整数 となることである。

1.2 パラメータ  $\nu, b = \beta t, r = \mu t, k$  の  $\mu$ -resolvable design は結合行列  $N$  に対して

$$N(I_t \otimes G_\beta) = \mu E_{\nu \times b} \quad (1.5)$$

で特徴づけられる。  $\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta$  は projection であり (1.5) より

$$N'N(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta) = \frac{r\beta}{\beta} G_b. \quad \text{この式と (1.2) より}$$

$$N'N(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b) = 0 \quad \text{をえる。したがって}$$

$$Q_0(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b) = \frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b$$

となる。ここで  $\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b$  は projection で

$$\text{rank}(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b) = t-1 \quad \text{より不等式}$$

$$b \geq \nu + t - 1 - d_0 \quad (1.6)$$

が成立する。さらに等号が成立するときは

$$Q_0 = \frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b \quad (1.7)$$

である。特に  $l=1$  の時 次をえる。

[定理 1.2]  $\mu$ -resolvable block design が affine  $\mu$ -resolvable (パラメータ  $\xi_1 = (\mu-1)k/(\beta-1), \xi_2 = k^2/\nu$ ) であるための必要十分条件は  $l=1$  かつ  $b = \nu + t - 1 - d_0$  である。

証明 (必要)  $N'N = I_t \otimes \{(k-\xi_1)I_\beta + (\xi_1 - \xi_2)G_\beta\} + \xi_2 G_b$   
 $= r k \frac{1}{\beta} G_b + (k-\xi_1)(I_b - \frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta) + 0(\frac{1}{\beta} I_t \otimes G_\beta - \frac{1}{b} G_b)$

とスペクトル分解できるから必要性は明らかである。

(十分)  $b = v + t - 1 - \alpha$  より (1.7) が成立し  $\ell = 1$  より  
 (1.2) は  $NN' = rk \frac{1}{b} G_b + P_1 (I_b - \frac{1}{b} I_t \otimes G_B) + O (\frac{1}{b} I_t \otimes G_B - \frac{1}{b} G_b)$   
 と書ける。したがって affine である。(証明おわり)

注1) 定理 1.2 は本質的には Shrikhande and Raghavarao [5] によつて得られている。

注2)  $q_1 = (\mu - 1)k / (b - 1)$ ,  $q_2 = k^2 / v$  は整数でなければならぬ。

## § 2. PBIB design のブロック構造

$m$ -associate PBIB design (パラメータ  $v, b, r, k, \lambda_i, i=1, 2, \dots, m$ )  
 の結合行列を  $N$  とするとき、一般に  $NN' = rk \frac{1}{v} G_v + \sum_{i=1}^m p_i P_i$  と  
 スペクトル分解できるが、ここでは  $p_i = 0$  (some  $i$ ) となる  
 場合のブロック構造を考える。また  $0 \leq p_i \leq rk$ 。

[補題 2.1]  $p_i = 0$  となるための必要十分条件は

$N'P_i = 0$  となることである。

証明 (必要)  $(N'P_i)'(N'P_i) = P_i NN'P_i = p_i P_i = 0$   
 したがって  $N'P_i = 0$  である。

(十分)  $p_i P_i = NN'P_i = 0$  したがって  $p_i = 0$  である。  
 (証明おわり)

2.1. 2-associate PBIB design に対しては

$$NN' = rk \frac{1}{v} G_v + P_1 P_1 + P_2 P_2 \quad (2.1)$$

となる。ここで

$$P_i = r - \{(\lambda_1 - \lambda_2)[-r + (-1)^i \sqrt{\Delta}] + \lambda_1 + \lambda_2\} / 2$$

$$P_i = \{(-1)^i [(n_1 - n_2) + (n_1 + n_2)(r - \sqrt{\Delta})] I_v + [(-1)^i (-2n_2 - 1 - r) - \sqrt{\Delta}] A_1 + [(-1)^i (2n_1 + 1 - r) - \sqrt{\Delta}] A_2\} / 2v\sqrt{\Delta} \quad i=1, 2$$

$$r = P_1^2 - P_2^2, \quad \Delta = r^2 + 2(P_1^2 + P_2^2) + 1$$

$$\text{rank } P_i = (n_1 + n_2) / 2 + (-1)^i [n_1 - n_2 + r(n_1 + n_2)] / 2\sqrt{\Delta}$$

である。

2.1.1. Group divisible PBIB design ( $v = mn$ , 処理が  $n$  個ずつ  $m$  groups に分かれる) においては

$$n_1 = n - 1, \quad n_2 = (m - 1)n, \quad P_{12}' = 0, \quad P_2^2 = n - 1, \quad A_1 = I_m \otimes G_n - I_v$$

$$NN' = rk \frac{1}{v} G_v + (rk - v\lambda_2) \left[ \frac{m-1}{v} (I_v + A_1) - \frac{1}{v} A_2 \right] + (r - \lambda_1) \left[ \frac{n-1}{n} I_v - \frac{1}{n} A_1 \right]$$

$$\text{rank} \left[ \frac{m-1}{v} (I_v + A_1) - \frac{1}{v} A_2 \right] = m - 1, \quad \text{rank} \left[ \frac{n-1}{n} I_v - \frac{1}{n} A_1 \right] = m(n - 1)$$

となる。このとき

[定理 2.2] Group divisible PBIB design において

(i)  $r - \lambda_1 = 0$  (singular 型) であるための必要十分条件は  $\frac{v}{n}$  が整数でかつ、すべてのブロックは association scheme における groups を  $\frac{v}{n}$  個ずつ含むことである。

(ii)  $rk - v\lambda_2 = 0$  (semiregular 型) であるための必要十

分条件は、 $k$  が整数でかつ、すべてのブロックは各 group の処理を  $k$  個ずつ含むことである。

証明 (i) 補題 2.1 により  $N'[\frac{n}{r}I_v - \frac{1}{n}A_1] = 0$  したがって  $N'[I_v - \frac{1}{n}I_m \otimes G_n] = 0$  ( $A_1 = I_m \otimes G_n - I_v$  より), 書きなおすと  $nN' = N'I_m \otimes G_n$  となり, これは「処理  $a$  があるブロック  $B$  に含まれるとき,  $a$  と同じ group の処理はすべて  $B$  に含まれる」ことを意味する。各ブロックは  $k$  個の処理を含むから結論をえる。

(ii) 補題 2.1 により  $N'[\frac{m-1}{v}(I_v + A_1) - \frac{1}{v}A_2] = 0$ 。  
 $A_1 = I_m \otimes G_n - I_v$ ,  $I_v + A_1 + A_2 = G_v$ , を用いて書きなおすと  $\frac{1}{v}N'[mI_m \otimes G_n - G_v] = 0$ 。ここで  $N'G_v = kE_{b \times v}$  より

$$N'[I_m \otimes G_n] = \frac{k}{m}E_{b \times v}$$

をうる。この式は定理の結論を意味する。(証明おわり)

注) 定理 2.2 の (i), および (ii) の必要性は Bose and Connor [1] によって得られている。

2.1.2. Triangular PBIB design ( $v = \frac{n(n-1)}{2}$ ) においては

$$n_1 = 2(n-2), \quad n_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}, \quad p'_{12} = n-3, \quad p''_{12} = 2n-8$$

$$N/N' = rk \frac{1}{v}G_v + [r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2] \left\{ [(2n-4)I_v + (n-4)A_1 - 4A_2] / \frac{n(n-2)}{2} \right\} \\ + (r - 2\lambda_1 + \lambda_2) \left\{ [(n-2)(n-3)I_v - (n-3)A_1 + 2A_2] / \frac{(n-1)(n-2)}{2} \right\}$$

の 2 項, の 3 項の rank は  $n-1, \frac{n(n-3)}{2}$

となる。このとき

[定理2.3] Triangular PBIB design において

(i)  $r - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  であるための必要十分条件は,  $\frac{2R}{n-1}$  が整数でかつ,  $N'[A_1 - (n-4)I_v] = \frac{2R}{n-1} E_{b \times v}$  である。

(ii)  $r + (n-4)\lambda_1 - (n-3)\lambda_2 = 0$  であるための必要十分条件は,  $\frac{2R}{n}$  が整数でかつ, すべてのブロックは association scheme の各行の処理を  $k$  個づつ含むことである。

証明 (i) 補題 2.1 より  $\frac{1}{(n-1)(n-2)} N'[(n-2)(n-3)I_v - (n-3)A_1 + 2A_2] = 0$  .

$I_v + A_1 + A_2 = G_v$  より  $N'[(n-1)(n-4)I_v - (n-1)A_1 + 2G_v] = 0$

$N'G_v = R E_{b \times v}$  より  $N'[A_1 - (n-4)I_v] = \frac{2R}{n-1} E_{b \times v}$  である。

(ii) (i) と同様にして  $N'[2I_v + A_1] = \frac{2R}{n} E_{b \times v}$  をえる, この式は「すべてのブロックは association scheme のかつてな 2 行の処理を  $k$  個づつ含む」ことを意味し, 定理の結論と同値である。 (証明おわり)

注) 定理2.3 (ii) の必要性は Raghavarao [3] により得られている。

### 2.1.3. 2.1.2 と同様の方法により

[定理2.4]  $L_i$ -PBIB design ( $v = S^2$ ,  $i$ -constraints  $2 \leq i \leq S$ ) において

(i)  $r - i\lambda_1 + (i-1)\lambda_2 = 0$  であるための必要十分条件は,



$\frac{(i-1)R}{s}$  が整数でかつ,  $N[A_i - (S-i)I_v] = \frac{(i-1)R}{s} E_{b \times v}$  である。

(ii)  $r + (S-i)\lambda_1 - (S-i+1)\lambda_2 = 0$  であるための必要十分条件は,  $\frac{R}{s}$  が整数でかつ, すべてのブロックは association scheme を定める各 square のなかで同一の文字に対応する処理を  $\frac{R}{s}$  個ずつ含むことである。

注) 定理 2.4 (ii) の必要性は Shrikhande and Raghavarao [5] により得られている。

特に  $i=2$  のときは, 次をえる。

[系]  $L_2$ -PBIB design において,  $r + (S-2)\lambda_1 - (S-1)\lambda_2 = 0$  であるための必要十分条件は,  $\frac{R}{s}$  が整数でかつ, すべてのブロックは association scheme の各行各列の処理を  $\frac{R}{s}$  個ずつ含むことである。

2.2 Rectangular association scheme をもつ 3-associate PBIB design ( $v=st$ , 処理が  $S$  行  $t$  列に配置されて, 同じ行は 1-st, 同じ列は 2-nd, 他は 3-nd) においては

$$\begin{aligned} NN' = r k \frac{1}{v} G_v &+ [r - \lambda_1 + (S-1)(\lambda_2 - \lambda_3)] \{ [(t-1)I_v - A_1 + (t-1)A_2 - A_3] / st \} \\ &+ [r - \lambda_2 + (t-1)(\lambda_1 - \lambda_2)] \{ [(S-1)I_v + (S-1)A_1 - A_2 - A_3] / st \} \\ &+ [r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3] \{ [(t-1)(S-1)I_v - (S-1)A_1 - (t-1)A_2 + A_3] / st \} \end{aligned}$$

$$A_1 = I_s \otimes (G_t - I_t), \quad A_2 = (G_s - I_s) \otimes I_t, \quad A_3 = (G_s - I_s) \otimes (G_t - I_t)$$

となる。 2.1 と同様にして

[定理 2.5] (i)  $r - \lambda_1 + (s-1)(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$  であるための必要十分条件は,  $\frac{r}{s}$  が整数でかつ, すべてのブロックは association scheme の各列の処理を  $\frac{r}{s}$  個ずつ含むことである。

(ii)  $r - \lambda_2 + (t-1)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$  であるための必要十分条件は,  $\frac{r}{t}$  が整数でかつ, すべてのブロックは association scheme の各行の処理を  $\frac{r}{t}$  個ずつ含むことである。

(iii)  $r - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  であるための必要十分条件は,

$$N[s(I_s \otimes G_t) + t(G_s \otimes I_t) - stI_v] = k E_{b \times v} \text{ である。}$$

注) 定理 2.5 の (i) (ii) の必要性は Vartak [6] により得られているらしい。

### 参 考 文 献

[1] Bose, R.C. and Connor, W.S. (1952). Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs. Ann. Math. Statist. 23 367-383.

[2] 石井 吾郎 (1972). 実験計画法 / 配置の理論 培風館.

[3] Raghavarao, D. (1960). On the block structure of certain PBIB designs with triangular and  $L_2$  association scheme. Ann. Math. Statist. 31 787-791.

[4] Shah, S.M. (1967). A note on the block structure of incomplete block designs. J. Indian Statist. Assoc. 5 13-15.

- [5] Shrikhande, S. S. and Raghavarao, D. (1963). Affine  $\lambda$ -resolvable incomplete block designs. Contributions to Statistics, Presented to Prof. P. C. Mahalanobis on the occasion of his 70<sup>th</sup> birthday. Pergamon Press. pp. 471-480.
- [6] Vartak, M. N. (1961). On some applications of Kronecker product of matrices to statistical designs. Unpublished Ph. D. Thesis. Univ. of Bombay.