数理解析研究所講究録
286巻 1977年 113-121

Foliated bundlesの接続について

北大 理学部　鈴木 治夫

1. Foliated principal GL_r-bundlesにおける，transverse projectable connectionsの構成と，それによって定まる2次特性コホモロジー類の，一つの性質について考察する．

"微分可能"はC^∞をいみするものとし，微分可能多様体はすべてパラコンパクト，ハウスドルフであると仮定しておく．

$\mathfrak{F}$をn次元微分可能多様体Mの上の，codimension q のfoliationとする． $T(M)$をMの接ベクトル・バンドル，$F\subset T(M)$を，$\mathfrak{F}$のleavesに接するベクトルから成る，部分ベクトル・バンドルとする． Foliation $\mathfrak{F}$をもつ多様体Mを$(M,\mathfrak{F})$とかき，$E(M,p,GL_r)$を$(M,\mathfrak{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundleとする．Mはパラコンパクトだから，$E(M,p,GL_r)$の上にリーマン接続が存在する． とくに，剰余ベクトル・バンドル$V_T=T(M)/F$のBott接続[1]により，V_Tのframe bundle $E(V_T)$は，$(M,\mathfrak{F})$の上のfoliated principal GL_r-bundle ($q=r$) となる． これを$E_T(M,p_T,GL_q)$

とかく。　Bott 接続は，その transverse connection となる[2]. M_1 を微分可能多様体，$f: M_1 \to M$ を $\mathcal{F}$ に transverse な微分可能写像，$\mathcal{F}_1 := f^*\mathcal{F}$ を，f によって $\mathcal{F}$ から誘導される，M_1 の上の codimension q foliation とする。　f による $E(M, p, GL_r)$ の誘導バンドルを $f^*E(M, p, GL_r)$ とし，f に対応する principal bundle map を $\bar{f}: f^*E(M, p, GL_r) \to E(M, p, GL_r)$ とかく。　$f^*E(M, p, GL_r)$ は，$(M_1, \mathcal{F}_1)$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E(M_1, p_1, GL_r)$ となることが容易にわかる。

$WO_{q,r}$ を differential algebra: $R[c_1, c_2, \cdots, c_s]/(\deg > q) \otimes \Lambda(h_1, h_3, \cdots, h_l)$, ($R$ は実数体), $s := \min(q, r)$, $l := \max\{2i+1 \leqq r\}$, $d(c_i) = 0$, $d(h_j) = c_j$ $(j \leqq s)$, $q < l$ の場合, $d(h_j) = 0$ $(j > s)$ とする。　M 上の複素数係数の微分形式環を $A^*_C(M)$ とかく。　M 上の principal GL_r-bundle E の接続 θ の曲率形式に対し，GL_r の Lie 環 gl_r の，次数が q より大きい任意の不変多項式の値が，0 となるならば，θ とリーマン接続 θ^0 とのアファイン結合を用いることにより，一般化された Bott の differential algebra map, $\lambda_{q,r}(\theta): WO_{q,r} \to A^*_C(M)$ が構成され，コホモロジー準同形，$\Delta_{q,r}(\theta): H^*(WO_{q,r}) \to H^*_{DR}(M; C)$ (H_{DR} は de Rham コホモロジー，C は複素数体）が得られる。　E が $(M, \mathcal{F})$ 上の foliated principal bundle $E(M, p, GL_r)$ で，θ がその transverse connection ならば，$\Delta_{q,r}(\theta)$ は，θ のとり方によらずに定まる。([1],[2] 参照).　これは，$(M, \mathcal{F})$ の $E(M, p, GL_r)$ の

特性準同形とよばれるものである。 とくに，$WO_q:=WO_{q,q}$ とおき，$E=E_T(M,p_T,GL_r)$ にとるとき，$\Delta_{q;r}(\theta)$ は，Bott の特性準同形 $\Delta_q(\mathcal{F}): H^*(WO_q)\to H^*_{DR}(M;C)$ となる。 WO_q のコサイクルを γ とかく。

Mを $q=2r+1$ 次元微分可能多様体，$\mathcal{F}$ をMの上の codimension r の foliation とし，$\mathcal{F}(f)$ を submersion $f: M_1\to M$ による，M_1 の foliation とする。

定理　$\mathcal{F}$ が non-trivial な Bott の q 次元２次特性コホモロジー類，$\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma]\neq 0$ をもち，$f^*: H^q(M;R)\to H^q(M_1;R)$ が injective ならば，$(M_1,\mathcal{F}(f))$ の上の foliated principal GL_r-bundle $E_0(M,p,GL_r):=f^*E(\nu_{\mathcal{F}})$ において，transverse projectable connections ω^0 および ω が存在し，γ に対する２次特性コホモロジー類が，それぞれ $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)[\gamma]=0$ および $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma]\neq 0$，$([\frac{q}{2}]=r)$ となる。

$\Delta_r(\mathcal{F})[\gamma]$ として，例えば，Godbillon-Vey コホモロジー類，$\Delta_r(\mathcal{F})[c_1^r h_1]$ をとることができ，submersion f として，Mのベクトル・バンドルの射影写像をとることができる。

2.　一般に，$\mathcal{F}$ に transverse な微分可能写像，$f: M_1\to M$ による誘導バンドル，$f^*E(M,p,GL_r)=E(M_1,p_1,GL_r)$ において，次の補題が成立つ。

補題２，１，　θ，θ^0 および ω を，それぞれ，$(M,\mathcal{F})$ の上

の $E(M,p,GL_r)$ の tranverse，リーマンおよび transverse projectable connection [2] とするとき，$\bar{f}^*\theta$，$\bar{f}^*\theta^0$ および $\bar{f}^*\omega$ は，それぞれ $(M_1,\mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1,p_1,GL_r)$ の transverse，リーマンおよび transverse projectable connection となる．

証明　$\mathcal{F}_E$ を，$\mathcal{F}$ の $E(M,p,GL_r)$ におけるリフトとし，F_E を $\mathcal{F}_E$ の leaves の接ベクトルから成る，$T(E(M,p,GL_r))$ の部分ベクトル・バンドルとする．$\mathcal{F}_{1,E}:=\bar{f}^*\mathcal{F}$ は，$E(M_1,p_1,GL_r)$ における $\mathcal{F}_1$ のリフトであり，対応する部分ベクトル・バンドルを $F_{1,E}$ とかく．$e\in E(M_1,p_1,GL_r)$ に対し，$X\in F_{1,E}|_e$ ならば，$\bar{f}_*X\in F_E|_{\bar{f}(e)}$ だから，$\bar{f}^*\theta(X)=\theta(\bar{f}_*X)=0$ となる．これは，$\bar{f}^*\theta$ が transverse connection であることを示している．V を $E(M,p,GL_r)$ に対応するベクトル・バンドル，v_i を V の局所基底ベクトル場とし，w_i を v_i に対応する f^*V の局所ベクトル場 $(w_i(y)=(v_i(f(y)),y),\ y\in M_1)$，$i=1,2,\cdots,r$ とする．θ^0 に対応する V の接続を ∇^0 とするとき，M_1 の局所接ベクトル場 Y に対して，

$$(f^*\nabla^0)_Y\langle w_i,w_j\rangle(y)=\nabla^0_{f_*Y(y)}\langle v_i,v_j\rangle(y)$$

$$=\langle(\nabla^0_{f_*Y(y)}v_i,y),(v_j(f(y)),y)\rangle+\langle(v_i(f(y)),y),(\nabla^0_{f_*Y(y)}v_j,y)\rangle$$

$$=\langle(f^*\nabla^0)_Yw_i,w_j\rangle(y)+\langle w_i,(f^*\nabla^0)_Yw_j\rangle(y).$$

この関係式は，接続の条件の下で保存されるから，f^*V の任意のベクトル場 s_1，s_2 に対して拡げられる．E の任意の局所 section s と，これに対応する f^*E の局所 section s' をとれば，

$s^*(\bar{f}^*\theta^0) = f^* s^* \theta^0$ となり，したがって $f^*\theta^0$ は，f^*V のリーマン接続に対応するから，$E(M_1, p_1, GL_r)$ のリーマン接続となる。

N を，$\mathfrak{F}$ に transverse な，M の q 次元局所部分多様体とし，N の上への $\mathfrak{F}$ の局所 submersion を h とする。h は $E(M, p, GL_r)$ の局所積構造の開集合 $U \subset M$ の上で定義されるとしてよい。必要ならば，N をさらに小さくとり，M_1 の中に微分可能 q 次元局所部分多様体 N_1 を見出し，f によって，N の上に微分位相同形に写されるようにすることができる。このとき，M_1 の開集合 $U_1 \subset f^{-1}(U)$ が存在し，$h_1 := (f|N_1)^{-1} \cdot h \cdot f|U_1 : U_1 \to N_1$ は，U_1 における $\mathfrak{F}_1$ の局所 submersion となるようにできる。あきらかに，$h \cdot f|U_1 = f \cdot h_1$．$E(M, p, GL_r)|U \cong h^*E(M, p, GL_r)|N$，$E(M_1, p_1, GL_r)|U_1 \cong h_1^*E(M_1, p_1, GL_r)|N_1$ だから，h および h_1 の covering principal bundle maps，$\bar{h} : E(M, p, GL_r)|U \to E(M, p, GL_r)|N$ および $\bar{h}_1 : E(M_1, p_1, GL_r)|U_1 \to E(M_1, p_1, GL_r)|N_1$ をえるが，$\bar{h} \cdot \bar{f}|(E(M_1, p_1, GL_r)|U_1) = \bar{f} \cdot \bar{h}_1$ とできる。$E(U) := E(M, p, GL_r)|U$，$E(U_1) := E(M_1, p_1, GL_r)|U_1$ 等とかくことにする。

$\omega|E(U) = \bar{h}^*(\omega|E(N))$ だから，

$$
\begin{aligned}
\bar{f}^*\omega|E(U_1) &= (\bar{f}|E(U_1))^*(\omega|E(U)) \\
&= (\bar{f}|E(U_1))^* \cdot \bar{h}^*(\omega|E(N)) \\
&= (\bar{h} \cdot \bar{f}|E(U_1))^*(\omega|E(N)) \\
&= (\bar{f} \cdot \bar{h}_1)^*(\omega|E(N)) \\
&= \bar{h}_1^*(\bar{f}^*\omega|E(N))
\end{aligned}
$$

となる。したがって，$\bar{f}^*\omega$ は $(M_1,\mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1,p_1,GL_r)$ の，transverse projectable connection である。 証明終

gl_r の不変多項式環を $I(gl_r)$ とかく。実数体上の $r\times r$ 行列 A に対し，不変多項式 c_i を，$\det(I+tA)=1+\sum_{i=1}^{r}t^i c_i(A)$ (t は不定元) と定めるとき，$I(gl_r)=R[c_1,c_2,\cdots,c_r]$ となることはよく知られている。 $\pi: M\times R\to M$，$\bar\pi: E(M,p,GL_r)\times R\to E(M,p,GL_r)$ を自然な射影とする。 $E(M,p,GL_r)$ の接続 θ およびリーマン接続 θ^0 に対し，$\bar\theta:=\bar\pi^*((1-t)\theta+t\theta^0)$ $(t\in R)$ とおく。 $\bar\theta$ は $E(M,p,GL_r)\times R$ の接続となる。 $\lambda(\theta)$, $\lambda(\theta^0,\theta): I(gl_r)\to A_c^*(M)$ を，$\lambda(\theta):=\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^i\varphi_i(\Omega)$ (φ_i は i 次元不変多項式，Ω は θ の曲率形式)，$\lambda(\theta^0,\theta)(\varphi_j):=\pi_*(\lambda(\bar\theta)(\varphi_j)|M\times[0,1])$，$\pi_*$ は trivial bundle π の integration over the fibre と定める。

$d\{\lambda(\theta^0,\theta)(c_{2i-1})\}=\lambda(\theta)(c_{2i-1})$ $(1\leqq 2i-1\leqq r)$ が成立つ ([1]，[2]) から，θ の曲率形式に対して，$I(gl_r)$ の k より大きい次数の，任意の多項式の値が 0 となるとき，differential map，$\lambda_{k,r}(\theta): WO_{k,r}\to A_c^*(M)$ が，$\lambda_{k,r}(\theta)(c_i):=\lambda(\theta)(c_i)$ $(1\leqq i\leqq \min(k,r))$，$\lambda_{k,r}(\theta)(h_j):=\lambda(\theta^0,\theta)(c_j)$ $(j=1,3,\cdots,l)$ によって定まる。 とくに，$(M,\mathcal{F})$ 上の $E(M,p,GL_r)$ の transverse connection θ に対して，Bott の vanishing theorem により，$\lambda_{q,r}(\theta)$ が定まる。 補題 2.1 により，$\bar{f}^*\theta$ は $(M_1,\mathcal{F}_1)$ の上の $E(M_1,p_1,GL_r)$ の transverse connection となるから，同様に $\lambda_{q,r}(\bar{f}^*\theta)$ が定まる。

補題 2．2． $\lambda_{q,r}(\bar{f}^*\theta)(c_i)=f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(c_i))$ $1\leqq i\leqq s$,

$$\lambda_{q,r}(\bar{f}^*\theta)(h_j)=f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(h_j)) \quad j=1,3,\cdots,l.$$

証明　オ１式は，直接の計算により容易に示される．　補題2.1により，$\bar{f}^*\theta^0$がリーマン接続であることを注意する．$\pi_1 : M_1 \times R \to M_1$を自然射影とするとき，Integration over the fibre の naturality [3, VII §5 PROP. VIII]により，

$$\begin{aligned}
\lambda_{q,r}(f^*\theta)(h_j) &= \lambda(\bar{f}^*\theta^0, \bar{f}^*\theta)(c_j) \\
&= \pi_{1*}(\lambda((f\times id)^*\bar{\theta})(c_j) \,|\, M_1 \times [0,1]) \\
&= \pi_{1*}((\tfrac{\sqrt{-1}}{2\pi})^j c_j((f\times id)^*\Omega(\bar{\theta})) \,|\, M_1 \times [0,1]) \\
&= f^* \cdot \pi_*((\tfrac{\sqrt{-1}}{2\pi})^j c_j(\Omega(\bar{\theta})) \,|\, M \times [0,1]) \\
&= f^*(\lambda(\theta^0, \theta)(c_j)) \\
&= f^*(\lambda_{q,r}(\theta)(h_j)),
\end{aligned}$$

となるから，オ２式が得られる．　証明終

3.　定理の証明.

θを$(M, \mathcal{F})$上の$E_T(M, p_T, GL_r)$の，transverse connection とする．$f^*E_T(M, p, GL_r)$は，$(M_1, \mathcal{F}_1) = (M_1, f^*\mathcal{F})$の上の foliated principal GL_r-bundle で，$E_T(M_1, p_1, GL_r)$と一致する．　定理の仮定と補題2.2により，

$$[\lambda_{r,r}(f^*\theta)(\gamma)] = [f_*(\lambda_{r,r}(\theta)(\gamma))] = f_* \Delta_r(\mathcal{F})[\gamma] \neq 0 .$$

$f^*E(V_{\mathcal{F}})$において，codimension q foliation $\mathcal{F}(f)$のリフトとして，submersion $\bar{f} : f^*E(V_{\mathcal{F}}) \to E(V_{\mathcal{F}})$による foliation をとることにより，$f^*E(V_{\mathcal{F}})$は，$(M, \mathcal{F}(f))$の上の foliated principal GL_r-bundle $E_0(M_1, p_1, GL_r)$となる．$E_T(M, p_T, GL_r)$の上のリーマン接続θ^0，$\mathcal{F}$の transverse connection θ

をとり，$\omega^0 := \bar{f}^*\theta^0$，$\omega := \bar{f}^*\theta$ とおく．　ω^0，ω は共に，$(M_1, \mathcal{F}(f))$ の上の $E_0(M_1, p_1, GL_r)$ の transverse projectable connections で，Bott の strong vanishing theorem が成立つから，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)$ および $\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)$ が定まる．　補題2.1 によって，ω^0 はリーマン接続だから，$\lambda_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)(h_j) = 0$ となり，したがって，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega^0)[\gamma] = 0$ となる．

$$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega) = [\lambda_{r,r}(\omega)(\gamma)] \neq 0.$$

証明終

$\mathcal{F}$ を M の上の codimension q foliation とする．　$(M, \mathcal{F})$ 上の，foliated principal GL_r-bundle $E(M, p, GL_r)$ における，transverse projectable connection ω に対し，$WO_{[\frac{q}{2}],r}$ のコサイクル，

$$\gamma = c_{i_1} \cdots c_{i_\lambda} \otimes h_{j_1} \wedge \cdots \wedge h_{j_\mu}$$

$$1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_\lambda \leq s = \min([\tfrac{q}{2}], r),\quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_\mu \leq l \ (j_\beta \text{ は奇数}),$$

をとるとき，$2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + j_1) > q+1$ ならば，対応する2次特性コホモロジー類，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma]$ は ω のとり方によらない（[2]）が，γ のコサイクルの条件 $2(\sum_{\alpha=1}^{\lambda} i_\alpha + j_1) > q$ だけでは，例えば $\gamma = c_1^r h_1$ で，$q = 2r+1$ のとき，$\Delta_{[\frac{q}{2}],r}(\omega)[\gamma] = \Delta_{r,r}(\omega)[\gamma]$ が，ω のとり方によって異なることを，定理は示している．

文　献

[1]　R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Mathematics, 279, Springer-Verlag,

Berlin-New York, 1972, 1-76.

[2] H. Suzuki, Characteristic classes of foliated principal GL_r-bundles, Hokkaido Math. J. IV (1975), 159-168.

[3] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, Connections, curvature, and cohomology, Vol. I, Academic Press, 1972.