数理解析研究所講究録
287巻 1977年 54-69

振動型の積分変換の L^2-理論

東大 理　　藤原 大輔
浅田 健嗣

本稿では，正のパラメタ ν に依存する振動する核をもった積分変換 $A(\nu)$ を考察する．

$\phi(x,\theta,y)$ が θ について，次数1の斉次関数のときは，$A(\nu)$ は Fourier Integral Operator (FIO_p) である．Eskin, Hörmander, Kumano-go 等．Eskin [4, 5] は $\nu=1$, $m=n$ のとき，L^2有界性を議論し，Hörmander [9] は systematic に扱い，FIO_p の distribution kernel と canonical graph の基本関係を証明した．しかし，L^2空間での有界性には余り注意をはらっていない．Kumano-go [11] は，ある仮定のもとで，$F.I.O_p.$ の L^2有界性をも証明した．

$\phi(x,\theta,y)$ が θ について斉次でない積分変換 $A(\nu)$ は，Schrödinger方程式の振動している初期値に対する解の漸近展開を扱うときに登場する．例えば，Birkoff [2], Maslov [14], Leray [13]. $m=0$ のときは，Fujiwara [6] により扱われ，

それを用いて，Schrödinger 方程式の基本解を構成した（[7], [8]）.

以下の§で，次のことを扱う.

§1. 記号.

§2. 振動型の積分変換の定義と L^2 有界性.

§3. 振動積分の停留位相の方法による $\nu\to\infty$ のときの漸近展開.

§4. 振動型の積分変換の L^2 における ν－漸近展開.

§5. 振動型の積分変換が正準変換と主シンボルによって，$\nu\to\infty$ のときの漸近的振舞を規定されるということ.

§6. 振動型の積分変換と擬微分作用素との合成について.

§1. 記号.

$\|f\|_p=\left(\int|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $1\leq p$.　$\|f\|_\infty=\text{ess. sup.}\,|f(x)|$.

$\|f\|=\|f\|_2$.

$(x,y)\in R^m\times R^n$，$f=f(x,y)$ に対して，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial y_k}\ ;\ \begin{matrix} j\downarrow 1,2,\cdots,m \\ k\to 1,2,\cdots,n\end{matrix}\right)$$

$\mathcal{B}(R^n)$＝各階の微分まで含めて有界な，C^∞ 関数の全体.

写像が class $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ 各成分関数の微分が $\mathcal{B}$ に属する.

$\mathcal{O}'_C$＝急減少の distributions の全体（L. Schwartz [15, p.244]）.

§2. L^2 有界性

正の parameter ν をもった次のような積分変換

(2.1) $$A(\nu)f(x) = \iint_{R^m \times R^n} a(x,\theta,y)\ \exp.\ i\nu\phi(x,\theta,y)\cdot f(y)\,dy\,d\theta \quad , \quad \nu \geqq 1$$

で，その phase 関数 ϕ と振幅関数 a が次の条件を満足しているものを考えよう．

(A-I) $\phi = \phi(x,\theta,y) \in C^\infty(R^n \times R^m \times R^n)$，実数値関数．

(A-II) $D(\phi)(x,\theta,y)$ を $m+n$ 正方行列

$$D(\phi)(x,\theta,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\phi(x,\theta,y)}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2\phi(x,\theta,y)}{\partial x\,\partial\theta} \\ \dfrac{\partial^2\phi(x,\theta,y)}{\partial\theta\,\partial y} & \dfrac{\partial^2\phi(x,\theta,y)}{\partial\theta\,\partial\theta} \end{pmatrix}$$

としたとき，次のような正の定数 δ_0 が存在する：

$$|\det D(\phi)(x,\theta,y)| \geqq \delta_0 \quad .$$

(A-III) 任意の多重指標 α, β, γ : $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geqq 2$ に対して，正の定数 $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ が存在する：

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma \phi(x,\theta,y) \right| \leqq C_{\alpha,\beta,\gamma}$$

(A-IV) $a \in \mathcal{B}(R^n \times R^m \times R^n)$.

(2.1) の右辺の積分は絶対収束しないので，その積分の意味を確定しなければならない．

$\mathcal{B}(R^n \times R^m \times R^n)$ の有界な関数列 $\{\omega_k(x,\theta,y)\}_{k=1,2,3,\cdots}$ で，$\omega_k \in \mathcal{S}(R^n \times R^m \times R^n)$，$\lim_{k\to\infty} \omega_k = 1$ （$\mathcal{E}(R^n \times R^m \times R^n)$ の位相で），なる

ものをとり、 $a_k(x,\theta,y) = a(x,\theta,y)\,\omega_k(x,\theta,y)$.

$$A_k(\nu)f(x) = \iint_{R^m \times R^n} a_k(x,\theta,y)\exp i\nu\phi(x,\theta,y)\cdot f(y)\,dy\,d\theta .$$

とする．各 $f \in C_0^\infty(R^n)$ に対して，$A_k(\nu)f \in C^\infty(R^n)$ は明らか．

補題 i) 各 $x \in R^n$ において，$\lim_{k\to\infty} A_k(\nu)f(x)$ が存在する．

そして，その値は $\{\omega_k\}$ のとり方に依らない．

ii) $A_k(\nu)f$ は $k\to\infty$ のとき，$L^2(R^n)$ で強収束する．

定義2.1 $f \in C_0^\infty(R^n)$ に対して，$A(\nu)f(x) = \lim_{k\to\infty} A_k(\nu)f(x)$ と定義．

定理2.1 条件(A-I)，(A-II)，(A-III)，(A-IV)を仮定する．そのとき，

次の評価が成り立つ．

$$\|A(\nu)f\| \leqq \delta_4 \cdot \nu^{-\frac{m+n}{2}}\|f\|, \quad f \in C_0^\infty(R^n).$$

ここで，δ_4 は ν に独立な正の定数，

注意 $m=0$ のときの L^2 有界性は Fujiwara [6]

注意 (2.1)の型の変換の合成・adjoint もまた(2.1)の型の

変換である．すなわち，

$$B(\nu)f(x) = \iint_{R^{m'} \times R^n} b(y,\eta,z)\exp i\nu\varphi(x,\eta,y)\,f(y)\,dy\,d\eta .$$

としたとき，

$$A(\nu)B(\nu)f(x) = \iiiint_{R^m \times R^n \times R^{m'} \times R^n} a(x,\theta,y)\,b(y,\eta,z)\exp i\nu\psi(x,\theta,y,\eta,z)\,f(z)\,dz\,d\eta\,dy\,d\theta .$$

$$\psi(x,\theta,y,\eta,z) = \phi(x,\theta,y) + \varphi(y,\eta,z)$$

ψ は (A-I)(A-II)(A-III) を m の代りに $m+n+m'$，θ の代りに (θ,y,η) として

みたす．

$$A^*(\nu)\, g(x) = \iint_{R^m \times R^n} \overline{a(y,\theta,x)}\ \exp i\nu[-\phi(y,\theta,x)]\ f(y)\, dy\, d\theta.$$

§3. 停留位相の方法.

まず次の振動積分Iについて，(B-I),(B-II),(B-III) をみたす条件下での積分の意味づけを行う.

(3.1) $$I = \int_{R^n} a(y) \exp. i\nu\phi(y)\, dy$$

(B-I) $\phi(y)$ は $y \in R^n$ の実数値 C^∞ 関数.

(B-II) $\left|\det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y_j \partial y_k}\right)\right| \geq C_0$ をみたす正の定数 C_0 が存在する.

(B-III) $|\alpha| \geq 2$ なる任意の多重指標 α に対して，$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha \phi(y)$ は $y \in R^n$ の有界関数.

補題3.1　ϕ が (B-I),(B-II),(B-III) をみたしているならば，$f(y) = \exp i\nu\phi(y) \in \mathcal{O}'_C$.

注意　$\exp i\nu|y|^2 \in \mathcal{O}'_C$ (L. Schwartz [15, p.245])

任意の $r \in R^1$ に対して，$(1+|y|^2)^r \exp i\nu\phi(y) \in \mathcal{B}'(R^n) = \text{dual of } \mathcal{D}_{L^1}(R^n)$ であるから，(B-I),(B-II),(B-III) と

(B-IV) ある $r>0$ について，$(1+|y|^2)^{-r} a(y) \in \mathcal{D}_{L^1}(R^n)$.

とを仮定して，I として次のように定義する.

定義　$$I = {}_{\mathcal{D}_{L^1}(R^n)}\left\langle (1+|y|^2)^{-r} a(y)\ ,\ (1+|y|^2)^r \exp. i\nu\phi(y) \right\rangle_{\mathcal{B}'(R^n)}$$

注意　(a) $a \in \mathcal{B}(R^n)$ に対して (3.1)は定義できる. 実際，$(1+|y|^2)^{-[\frac{n}{2}]-1} a \in \mathcal{D}_{L^1}(R^n)$.

(6) $\chi\in C_0^\infty(R^n)$, 原点の近傍で $\chi=1$ として,

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^n}a(y)\chi(\varepsilon y)\exp.i\nu\phi(y)dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R^n}a(y)\exp.[i\nu\phi(y)-\varepsilon|y|^2]dy.$$

次の形の振動積分の $\nu\to\infty$ のときの漸近的ふるまいを (C-I)〜(C-IV) の仮定の下で調べよう.

$$I(x,\nu)=\int_{R^n}a(x,y)\exp.i\nu\phi(x,y)\,dy$$

(C-I) $\phi=\phi(x,y)$ は $(x,y)\in R^m\times R^n$ の実数値 C^∞- 関数.

(C-II) 次のような正の定数 C_0 が存在する:

$$\left|\det\left(\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial y_k}\phi(x,y)\right)\right|\geqq C_0\quad,\quad(x,y)\in R^m\times R^n.$$

(C-III) 多重指標 $\alpha,\beta:|\alpha|+|\beta|\geqq 2$ に対して, 正定数 $C_{\alpha\beta}$ が存在:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\beta\phi(x,y)\right|\leqq C_{\alpha,\beta}\quad,\ (x,y)\in R^m\times R^n.$$

(C-IV) $a(x,y)\in\mathcal{B}(R^m\times R^n)$.

このとき, (C-II) より方程式系 $\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)=0$ は唯1の解 $y=y(x)$ をもち,

$$H(x)=\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial y_j\partial y_k}(x,y(x))\right]$$

$$h(x,y)=\phi(x,y)-\phi(x,y(x))-\frac{1}{2}\langle H(x)(y-y(x)),\,y-y(x)\rangle.$$

補題 3.2 (停留位相の方法). (C-I), (C-II), (C-III), (C-IV) を満足するとき,

$$I(x,\nu)=\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{n/2}|\det H(x)|^{-1/2}\exp.\frac{\pi i}{4}[n-2\,\mathrm{Ind}\,H(x)]\times\exp.i\nu\phi(x,y(x))\times$$
$$\times\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}\left[\left(-\frac{i}{2\nu}\langle H^{-1}(x)D_y,D_y\rangle\right)^k a(x,y)\exp.i\nu h(x,y)\right]\Big|_{y=y(x)}\right\}$$
$$+\ \exp.i\nu\phi(x,y(x))\cdot p_N(x,\nu).$$

ここで, $\mathrm{Ind}\,H(x)$ は行列 $H(x)$ の負部分空間の最大次元. また, 任意の多重指標 α に対して, 正の定数 C_α が存在して,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} P_N(x,\nu)\right| \leqq C_\alpha \cdot \nu^{-N} .$$

§ 4. 積分変換の L^2 における漸近展開

$\theta=(\theta',\theta'')\in R^{m_1}\times R^{m_2}$, $m_1+m_2=m$ （$m_1=0$ のとき，$\theta=\theta''$）.

(A-V) $\exists \delta_6>0$ $\quad \left|\det \frac{\partial^2}{\partial\theta''\partial\theta''}\phi(x,\theta',\theta'',y)\right| \geqq \delta_6$ ， $(x,\theta,y)\in R^n\times R^m\times R^n$.

$A(\nu)$について，(A-I), (A-II), (A-III), (A-IV), (A-V) を仮定する．そのとき，

$$g(\nu,x,\theta',y)=\int_{R^{m_2}} a(x,\theta',\theta'',y)\ \exp.\ i\nu\phi(x,\theta',\theta'',y)\,d\theta''$$

$$A(\nu)f(x)=\iint_{R^{m_1}\times R^n} g(\nu,x,\theta',y)\ f(y)\,dy\,d\theta'.$$

に §3 の結果を適用することができ，g の漸近展開を得る．

条件(A-V) より，方程式系 $\frac{\partial}{\partial\theta_j}\phi(x,\theta',\theta'',y)=0$，$j=m_1+1,\cdots,m$ は唯１の解 $\theta''=\theta''(x,\theta',y)\in\mathcal{B}(R^n\times R^{m_1}\times R^n)$ （$m_1=0$ のとき，$\theta''=\theta(x,y)\in\mathcal{B}(R^n\times R^n)$）をもつ．

$$\phi_0(x,\theta',y)=\phi(x,\theta,y)\big|_{\theta''=\theta''(x,\theta',y)}$$

$$H(x,\theta',y)=\frac{\partial^2}{\partial\theta''\partial\theta''}\phi(x,\theta,y)\ \Big|\ \theta''=\theta''(x,\theta',y)$$

$$h(x,\theta,y)=\phi(x,\theta,y)-\phi_0(x,\theta',y)-\frac12\left\langle H(x,\theta',y)[\theta''-\theta''(x,\theta',y)],\ \theta''-\theta''(x,\theta',y)\right\rangle$$

定理 4.1 i) $\phi_0(x,\theta',y)$ は (A-I), (A-II), (A-III) を $m=m_1$ として，満足する．

ii) $$A(\nu)f(x)=\iint_{R^{m_1}\times R^n} b(\nu,x,\theta',y)\ \exp.\ i\nu\phi_0(x,\theta',y)\ f(y)\,dy\,d\theta'.$$

$$b(\nu,x,\theta',y)=\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{m_2/2}\left|\det H(x,\theta',y)\right|^{-1/2}\ \exp.\ \frac{\pi i}{4}\left[m_2-2\,\mathrm{Ind}\,H(x,\theta',y)\right]\times$$
$$\times\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!}\left(-\frac{i}{2\nu}\left\langle H(x,\theta',y)^{-1}D_{\theta''},D_{\theta''}\right\rangle\right)^{k}\left[a(x,\theta,y)\exp i\nu h(x,\theta,y)\right]\Big|_{\theta''=\theta''(x,\theta',y)}\right\}$$
$$+\ r_N(\nu,x,\theta',y).$$

任意の多重指標α,β,γに対して，正の定数 $C_{\alpha,\beta,\gamma}$ が存在：

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \theta'}\right)^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\gamma} r_N(\nu, x, \theta', y)\right| \leqq C_{\alpha,\beta,\gamma}\, \nu^{-N-\frac{m_2}{2}}.$$

系 4.1. $R_N(\nu) f(x) = \iint_{R^{m_1}\times R^n} r_N(\nu, x, \theta', y) \exp i\nu\phi_0(x,\theta',y)\, f(y)\, dy\, d\theta'.$

としたとき，次の評価を得る．

$$\| R_N(\nu) f \| \leqq C \cdot \nu^{-\frac{m+n}{2}-N} \| f \|.$$

定理 4.2　条件 (A-I), (A-II), (A-III), (A-IV) と，(A-V) の $m_1 = 0$ の場合を仮定する．

$$\| A(\nu) f \|_{p'} \leqq C \cdot \nu^{-\frac{m+n}{p'}} \| f \|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leqq p \leqq 2.$$

ここで，$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$

・注意．定理 4.2 は Fourier 変換の Hausdorff−Young の定理の拡張である．

さらに，条件 (A-V) は次のように弱くすることができる．

(A-V$'_a$) 方程式系 $\frac{\partial}{\partial\theta''}\phi(x,\theta',\theta'',y) = 0$ は有限個の解 $\theta'' = \theta''_{(j)}(x,\theta',y)$, $j = 1, 2, \cdots, k$ をもつ．

正の定数 $\rho > 0$ が存在して，(A-V$'_b$), (A-V$'_c$) が成り立つ．

(A-V$'_b$) $\exists \gamma_1 > 0 : |\theta'' - \theta''_{(j)}(x,\theta',y)| \leqq \rho$ ならば，$\left|\det \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta''\partial\theta''}\right| \geqq \gamma_1.$

(A-V$'_c$) $\exists \gamma_2 > 0 : |\theta'' - \theta''_{(j)}(x,\theta',y)| \geqq \frac{1}{2}\rho$ ならば，$\left|\frac{\partial}{\partial\theta''}\phi(x,\theta',\theta'',y)\right| \geqq \gamma_2.$

$$\phi_{(j)}(x,\theta',y) = \phi(x,\theta',\theta''_{(j)}(x,\theta',y),y)$$

$$H_{(j)}(x,\theta',y) = \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta''\partial\theta''}\right|_{\theta''=\theta''_{(j)}(x,\theta',y)}.$$

$$h_{(j)}(x,\theta,y) = \phi(x,\theta,y) - \phi_{(j)}(x,\theta',y) - \frac{1}{2}\langle H_{(j)}(x,\theta',y)[\theta'' - \theta''_{(j)}(x,\theta',y)], \theta'' - \theta''_{(j)}(x,\theta',y)\rangle$$

定理4.3　条件(A-I), (A-II), (A-III), (A-IV), (A-V$'_a$), (A-V$'_b$), (A-V$'_c$)を仮定する．そのとき，任意の非負整数 $N\geqq 0$ に対して，

$$A(\nu)f(x)=\sum_{j=1}^{k}\iint p_{N,j}(\nu,x,\theta',y)\cdot\exp i\nu\phi_{(j)}(x,\theta',y)\cdot f(y)\,dy\,d\theta'+Q_N(\nu)f(x).$$

$$p_{N,j}(\nu,x,\theta',y)=\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{\frac{m_2}{2}}\left|\det H_{(j)}(x,\theta',y)\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\frac{\pi i}{4}\left[m_2-2\,\mathrm{Ind}\,H_{(j)}(x,\theta',y)\right]\times$$

$$\times\left\{\sum_{\ell=0}^{N-1}\frac{1}{\ell!}\left(-\frac{i}{2\nu}\left\langle H_{(j)}(x,\theta',y)^{-1}D_{\theta''},D_{\theta''}\right\rangle\right)^{\ell}\left[a(x,\theta,y)\exp i\nu h_{(j)}(x,\theta,y)\right]\Big|_{\theta''=\theta''_{(j)}(x,\theta',y)}\right\}$$

$$\|Q_N(\nu)f\|\leqq C\cdot\nu^{-N-\frac{m+n}{2}}.$$

§5．正準変換と主シンボル．

(A-I), (A-II), (A-III) をみたす phase 関数を $\phi(x,\theta,y)$，(A-IV) をみたす振幅関数を $a(x,\theta,y)$ として，$A(\nu)$ を次で定義しておく．

$$(5.1)\quad A(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}}\iint_{R^m\times R^n}a(x,\theta,y)\exp i\nu\phi(x,\theta,y)\cdot f(y)\,dy\,d\theta.$$

$$C_\phi=\left\{(x,\theta,y)\in R^n\times R^m\times R^n\ \Big|\ \frac{\partial}{\partial\theta}\phi(x,\theta,y)=0\right\},\ m=0\text{ のとき，}C_\phi=R^n\times R^n.$$

$$R^n\times R^m\times R^n\ni(x,\theta,y)\begin{array}{l}\xrightarrow{\iota_1}\left(x,\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\theta,y),\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(x,\theta,y)\right)\in R^n\times R^m\times R^n.\\ \xrightarrow{\iota_2}\left(y,-\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,\theta,y),\frac{\partial\phi}{\partial\theta}(x,\theta,y)\right)\in R^n\times R^m\times R^n\end{array}$$

とするとき，ι_1,ι_2 は diffeomorphism であり，ι_j,ι_j^{-1} とも class $\mathcal{B}$ である $(j=1,2)$．

$$C_\phi=\iota_1^{-1}(R^n\times R^n\times\{0\})=\iota_2^{-1}(R^n\times R^n\times\{0\}).$$

$$C_\phi\ni(x,\theta,y)\begin{array}{l}\xrightarrow{\iota_1}\left(x,\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\theta,y)\right)\in R^n\times R^n\\ \xrightarrow{\iota_2}\left(y,-\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,\theta,y)\right)\in R^n\times R^n\end{array}$$

はともに diffeomorphism.

R^nに標準座標をとり，T^*R^nと$R^n\times R^n$を同一視する．

$R^n\times R^n\ni(x,\xi)\longleftrightarrow \xi\cdot dx=\xi_1dx_1+\cdots+\xi_ndx_n\in T^*R^n$.

$$C_\phi\ni(x,\theta,y)\xrightarrow{\ \iota\ }\left(x,\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\theta,y),\ y,\ -\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,\theta,y)\right)\in T^*(R^n\times R^n).$$

による C_ϕ の像を $\Lambda(\phi)$, $\chi=\iota_1\circ\iota_2^{-1}:T^*R^n\to T^*R^n$ と定義する．

命題5.1 i) $\Lambda(\phi)$ は T^*R^n の正準変換 χ のグラフである．

ii) $\iota:C_\phi\longrightarrow\Lambda(\phi)\subset T^*(R^n\times R^n)$ は regular embedded submanifold.

iii) χ,χ^{-1} は class $\mathcal{B}$ である．

振幅関数 a の C_ϕ への制限 $a|_{C_\phi}$ は，$\Lambda(\phi)$ 上の bundle $\Omega_{1/2}\otimes L$ の section σ_A と同一視できる．ここで，$\Omega_{1/2}$ は density $\frac{1}{2}$ の bundle，L は Keller-Maslov bundle over $\Lambda(\phi)$ である（L. Hörmander [9]）．σ_A を $A(\nu)$ の主シンボルとよぶ．

Question: $A(\nu)$ はその正準変換 χ と主シンボル σ_A によって，mod $O(\nu^{-1})$ ノルムの範囲で決まるか．

定理5.1　(A-I), (A-II), (A-III), (A-IV) を仮定する．もし $a|_{C_\phi}\equiv 0$ ならば，$\|A(\nu)f\|\leqq C\nu^{-1}\|f\|$.

定理5.2.

$$A_1(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}}\iint_{R^m\times R^n}a_1(x,\theta,y)\exp i\nu\phi_1(x,\theta,y)\ f(y)\,dy\,d\theta$$

$$A_2(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{\tilde{m}+n}{2}}\iint_{R^{\tilde{m}}\times R^n} a_2(x,\tilde{\theta},y)\ \exp.\, i\nu\phi_2(x,\tilde{\theta},y)\ f(y)\,dy\,d\tilde{\theta}.$$

を共に，(A-I), (A-II), (A-III), (A-IV) をみたす振動積分変換とする．$\Lambda(\phi_1)=\Lambda(\phi_2)$，$\sigma_{A_1}=\sigma_{A_2}$ を仮定する．もし $V=\Lambda(\phi_1)=\Lambda(\phi_2)$ が条件 (Λ-1) をみたしているとする．

(Λ-1) Vが局所的に $(x_{K^c},\xi_K,y)=(x_j,\xi_k,y)_{j\in K^c,k\in K}$，$K\subset\{1,2,\cdots,n\}$ とかけるところで，有限枚の枝しかもたない．

$\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x,\theta,y)\big|C_\phi=\xi_j$.

このとき，次の式をみたす正の定数 C と実定数 γ が存在する．

$$\|A_1(\nu)f-e^{i\nu\gamma}A_2(\nu)f\|\leqq C\cdot\nu^{-1}\|f\|,\quad f\in C_0^\infty(R^n).$$

ここに，$\gamma=\phi_2\circ\tau'^{-1}(v_0)-\phi_1\circ\tau^{-1}(v_0)$，$v_0\in V$.

注意　作用素の合成に対応する正準変換は，各作用素に対応する正準変換の合成である．また $A(\nu)\sim\chi$ ならば，$A(\nu)^*\sim\chi^{-1}$ である．

注意　振幅関数 $a(x,\theta,y)$ が条件(A-IV) と次の条件

$$|a(x,\theta,y)|\geqq\delta>0,\quad (x,\theta,y)\in R^n\times R^m\times R^n$$

を満足するとき，νが十分大きいとき，$A(\nu)$ の逆変換$A(\nu)^{-1}$が存在して，$L^2(R^n)$ の連続写像となる．実際 $b(x,\theta,y)=1/a(y,\theta,x)$ とおけば，b も (A-IV) を満足する．

$$B(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}}\iint_{R^m\times R^n} b(x,\theta,y)\cdot\exp.\,i\nu[-\phi(y,\theta,x)]\cdot f(y)\,dy\,d\theta.$$

とし，$A(\nu)B(\nu)$ を考える．

$$A(\nu)B(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{m+n}\iiiint_{R^m\times R^n\times R^m\times R^n} a(x,\theta,y)\,b(y,\theta',z)\,\exp.[i\nu(\phi(x,\theta,y)-\phi(z,\theta',y))]\times$$
$$\times f(z)\,dz\cdot d\theta' dy\,d\theta\ .$$

$A(\nu)B(\nu)$ に対応する正準変換は T^*R^n の恒等写像，主シンボルは

$a(x,\theta,y)\,b(y,\theta,x)\equiv 1$ ，$(x,\theta,y)\in C_\phi$． Fourier 反転公式

$$f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^n\iint_{R^n\times R^n}\exp[i\nu\,\xi\cdot(x-y)]\cdot f(y)\,dy\,d\xi$$

の右辺もまた，振動積分変換で，対応する正準変換は恒等写像，主シンボルは 1．従って，定理 5.2 より，実定数 γ と連続線型変換 $R(\nu)$ が存在して，

$$e^{i\nu\gamma}A(\nu)B(\nu)=I+R(\nu)\quad,\quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\ \nu\cdot\|R(\nu)\|=0.$$

となる．それ故，ν が十分大きいとき，

$$A(\nu)^{-1}=e^{i\nu\gamma}B(\nu)[I+R(\nu)]^{-1}.$$

特に，$a(x,\theta,y)=1$ の場合．

$$A(\nu)f(x)=\left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}}\iint_{R^m\times R^n}\exp.\,i\nu\phi(x,\theta,y)\cdot f(y)\,dy\,d\theta\,.$$

$B(\nu)=A(\nu)^*$． $A(\nu)B(\nu)=A(\nu)A(\nu)^*$ は正定値．よって，$\gamma=0$．故に，ν が十分大きいとき，

$$A(\nu)^{-1}=A(\nu)^*\cdot(I+R(\nu))^{-1}.$$

$I+R(\nu)$ が正定値であることに注意して，

$$U(\nu)=(I+R(\nu))^{-1/2}A(\nu)$$

とおけば，$U(\nu)U(\nu)^*=I$ ，すなわち，$U(\nu)$ はユニタリー作

用素となる．

§6. 擬微分作用素との合成．

(P-1) $\quad \frac{\partial}{\partial \xi_j} p(x,\xi,y) \in \mathcal{B}(R^n \times R^n \times R^n)$, $\frac{\partial}{\partial \xi_j} q(x,\xi,y) \in \mathcal{B}(R^n \times R^n \times R^n)$, $j=1,\cdots,n$.

条件 (P-1) をみたす $p(x,\xi,y) \in C^\infty(R^n \times R^n \times R^n)$ に対し、擬微分作用素 $P(x,D,x)$ を次で定義する．

$$P(x,D,x)f(y) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^n \iint p(x,\xi,y)\, \exp.[i\nu\, \xi\cdot(x-y)]\cdot f(y)\,dy\,d\xi, \quad f \in \mathcal{S}(R^n).$$

命題6.1 上で定義された擬微分作用素 $P(x,D,x)$ は $L^2(R^n)$ から $\mathcal{D}'(R^n)$ への連続線型作用素に拡張できる．

命題6.2 $A(\nu)$ を (5.1) の型の積分変換，$p(x,\xi,y)$ が条件(P-1)をみたす C^∞ 関数とする．

$$P(x,D,x)A(\nu)f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{m+n}{2}} \iint_{R^m \times R^n} p\left(x, \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,\theta,y), x\right) a(x,\theta,y)\, \exp.\, i\nu\phi(x,\theta,y)\cdot$$
$$\cdot f(y)\,dy\,d\theta$$
$$+\nu^{-1} R_1(\nu) f(x).$$

ここで，$R_1(\nu)$ は (5.1) の型の積分変換で，その phase 関数は

$$\varphi(x,\xi,y,\theta,z) = (x-y)\cdot\xi + \phi(y,\theta,z).$$

命題6.3. $A(\nu)$ を (5.1) の型の積分変換，$q(x,\xi,y)$ を条件 (P-1) をみたす C^∞ 関数とする．そのとき，

$$A(\nu)Q\, f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi}\right)^{\frac{n+m}{2}} \iint_{R^m \times R^n} a(x,\theta,y)\; q\left(y, -\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,\theta,y), y\right) \exp.\, i\nu\phi(x,\theta,y) f(y)\,dy\,d\theta$$
$$+\nu^{-1} R_2(\nu) f(x).$$

ここで，$R_2(\nu)$ は (5.1) の型の積分変換で，その phase function は $\psi(x,\theta,y,\eta,z) = \phi(x,\theta,y) + (y-z)\cdot\eta$.

次に，$P(x,D,x)A(\nu) - A(\nu)Q(x,D,x)$ を考える.

(P-II). $\frac{\partial}{\partial x_j}p(x,\xi,x)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}q(x,\xi,x) \in \mathcal{B}(R^n \times R^n)$, $j=1,2,\cdots,n$.

(P-III). $\chi : R^{n+m} \ni (y,\eta) \to (x,\xi) = \chi(y,\eta) \in R^{n+m}$ を phase 関数 ϕ に対応する正準変換としたとき,

$$p(x,\xi,x)\Big|_{(x,\xi)=\chi(y,\eta)} = q(y,\eta,y).$$

定理 6.1. $A(\nu)$ を (5.1) の型の積分変換，$p(x,\xi,y)$ $q(x,\xi,y)$ を条件 (P-I), (P-II), (P-III) をみたす C^∞ 関数とする．そのとき，

i) $i\nu\big(P(x,D,x)A(\nu) - A(\nu)Q(x,D,x)\big)$ は (5.1) の型の積分変換で，m を $m+2n$ にかえたもの.

ii) $\| [P(x,D,x)A(\nu) - A(\nu)Q(x,D,x)]f \| \leq C\nu^{-1}\|f\|$.

iii) $i\nu[P(x,D,x)A(\nu) - A(\nu)Q(x,D,x)]$ に対応する正準変換は $A(\nu)$ のと同じである.

命題 6.4. $p(x,\xi,y)$ を (P-I), (P-II) をみたす C^∞ 関数とするとき，(P-III) をみたすように $q(y,\eta,z)$ をみつけることができる.

参考文献

[1] Asada, K. and D. Fujiwara, On the boundedness of integral transformations with rapidly oscillatory kernels, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 628−639.

[2] Birkoff, G.D., Quantum mechanics and asymptotic series, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (1933), 681−700.

[3] Calderón, A.P. and R. Vaillancourt, A class of bounded pseudo-differential operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 69 (1972), 1185−1187.

[4] Eskin, G.I., The Cauchy problem for hyperbolic system in convolution, Math. USSR Sb., 3 (1967), 243−277.

[5] ——, Degenerate elliptic pseudo-differential equations of principal type, Math. USSR Sb., 11 (1970), 539−582.

[6] Fujiwara, D., On the boundedness of integral transformations with highly oscillatory kernels, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 90−99.

[7] ——, Fundamental solutions of partial differential operators of Schrödinger's type I, Proc. Japan Acad. 50 (1974), 566−569, II, 699−701.

[8] ——, Construction of the fundamental solutions of Schrödinger's equation on the sphere, J. Math. Soc. of Japan 28 (1976) 483−

505.

[9] Hörmander, L., Fourier integral operators I., Acta Math. 127 (1971), 79—183.

[10] ——, Oscillatory integrals and multipliers on $\mathcal{F}L^p$, Arkiv för Mat. 1 (1973), 1—11.

[11] Kumano-go, H., A calculus of Fourier integral operators on R^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type, Communications in partial differential equations.

[12] Lax, P.D., Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J. 24 (1957), 627—646.

[13] Leray, J., Solutions asymptotique des équations aux dérivées partielles, Séminaire Leray, Collège de France, 1972.

[14] Maslov, V.P., 摂動論と漸近的方法, 岩波, 1976（大内, 金子, 村田 訳）

[15] Schwartz, L., Théorie des distribution, Herman, Paris, 2e ed. 1966.

[16] Schwartz, J.T., Nonlinear functional analysis, Gordon-Breach, New York, 1969.