数理解析研究所講究録
287巻 1977年 2-9

超局所混合問題の適切性の定義について

東大理　片岡清臣

混合問題については昔から多くの仕事がなされているが、多くの場合は初めにある領域が与えられていて、そこに於けるグローバルな関数を対象にして問題が扱われている。しかしこれでは領域毎に問題を考え直さなければいけない事になり、統一的にその原理を把握するのは難しい。

一方、双曲型混合問題については作用の伝播速度が有限なのであるから、ある境界点付近の短時間の解の挙動というものは領域全体の形や離れた地点での境界条件などにはある意味では関係しないと考えられる。従って混合問題を局所的、或いはさらに進んで超局所的に取り扱う事が統一的理解の為には不可決である。

この小論ではいわゆる回折現象のモデルとなる混合問題の具体例を、この観点からまだ不完全ではあるが解析してみたい。尚、楕円型境界値問題や、双曲型混合問題でも境界面

上で特性根が単純な場合は、(反射しか起こらない) 超局所的解明が既に行われているのでここでは省略する。

§1. 回折現象のモデルについて.

いわゆる回折現象とは例えば3次元時空 (x, y, t) では次の様な簡単なモデルで表わされる。

$$\Omega = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2>1\}$$

$$\Gamma = \{x^2+y^2=1\}$$

$$\begin{cases} \Box u = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 & \text{in } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

但しここで境界条件としてDirichlet条件を選んだ。

超局所境界値問題の一般論に乗せる為、次の様な座標変換をして、境界 Γ を $\{x_1=0\}$ で表わされるようにする。

$$x_1 = \log(x^2+y^2), \quad x_2 = t, \quad x_3 = \tan^{-1}\frac{y}{x},$$

$$\therefore \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - e^{2x_1}\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) u = 0, & x_1 > 0 \\ u|_{x_1=0} = 0. \end{cases}$$

(この変換は x_3 について一価ではないが、今は問題を超局所的にとらえているのであるからかまわない。)

しかし今はモデルを考えているのであるから、上の作用素をさらに簡単化して、 $P = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (1+x_1)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ としてしまう。

従って問題は、

$$
①\cdots\begin{cases} P\,u = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (1+x_1)\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)u = 0 & x_1 > 0, \\ u\big|_{x_1=0} = 0 \end{cases}
$$

となる。

§2、接触幾何学との関係について、

①で出て来た様な作用素が接触幾何学的にはどう捉えられるかをみてみる。まず一般に $Q(x, D_x)$ をシンボルが実となる様な単一特性的作用素とすれば、同次解の特異性は、接解多様体 iS^*R^n の中で $\{\sigma(Q)=0\}$ という部分のみにあって、しかもその中で Q のハミルトニアンベクトル場 $H_{\sigma(Q)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\sigma(Q)}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial\sigma(Q)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)$ の積分曲線に沿って伝播する。ところが今、特異性が $\{x_1=0\}$ という境界にあたった場合は、そこで伝播に異常が起きる。そしてそこでは解の特異性を左右するものは、$\sigma(Q)$ と x_1 であり、従ってその伝播方向は $H_{\sigma(Q)}$ と $H_{x_1} = \frac{\partial}{\partial\xi_1}$ の両方に関係すると考えられる。すなわち、

$L = \{\sigma(Q)=0,\ x_1=0\}$ 上では、伝播方向は、$\mathbb{R}\cdot H_{\sigma(Q)} + \mathbb{R}\cdot H_{x_1}$ に属す。今、その方向を $X = \alpha H_{\sigma(Q)} + \beta H_{\sigma(x_1)}$ $((\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2-\{0\})$ とおいてみると、$X\sigma(Q) = X\sigma(x_1) = 0$ でない限り、X は L に接していないから特異性は L の外へ直ちに飛び出してしまう。これは反射の場合に当る。ところが $X\sigma(Q) = X\sigma(x_1) = 0$ とす

る場合，すなわち $F=\{(x,\xi)\in L\ ;\ \{x_1,\sigma(Q)\}=0\}$ となる点においては伝播方向は L に接している。これは特異性の一部が L の中を伝わる事を示している。これがいわゆる回折波である。

すなわち回折波とは，

$$F=\{\ \sigma(Q)=0,\ x_1=0,\ \{x_1,\sigma(Q)\}=0\ \}\quad 内を$$

$\mathbb{R}\cdot H_{\sigma(Q)}+\mathbb{R}\cdot H_{x_1}$ のうち F に接する方向，すなわち，

$$\mathcal{X}_F=\{x_1,\{x_1,\sigma(Q)\}\}\cdot H_{\sigma(Q)}-\{\sigma(Q),\{x_1,\sigma(Q)\}\}\,H_{x_1}$$

の積分曲線に沿って進む。ここで，$\{x_1,\{x_1,\sigma(Q)\}\}\neq0$，$\{\sigma(Q),\{x_1,\sigma(Q)\}\}\neq0$ という条件をつければ，$\sigma(Q)$ の形は $\{x_1=0\}$ を保つ接触変換によって，

$$\sigma(Q)=\xi_1^2-(x_1-\xi_3/\xi_2)\cdot a(x,\xi')$$

とできる，但し a は同次2次で ξ_1 を含まない実シンボルである。$(a\neq0)$．$a=\xi_2^2$ の場合は①の P と同値である。

ここで§1で得た $P=D_1^2-(1+x_1)D_2^2+D_3^2$ について，F，$\mathcal{X}_F$ を求めてみると，

$$\sigma(P)=\xi_1^2-(1+x_1)\xi_2^2+\xi_3^2\ \left(=\xi_1^2-(x_1+1-\tfrac{\xi_3^2}{\xi_2^2})\xi_2^2\right)$$

$$F=\{\ x_1=\xi_1=0,\ \ \xi_2\pm\xi_3=0\}$$

$$\mathcal{X}_F=C\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\xi_3}{\xi_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\qquad(\ C\ は\ zero\ でない関数)$$

今 F の連結成分の一つ $\{x_1=\xi_1=0,\ \xi_2=\xi_3=+i\infty\}$ で考える事にすれば，$\mathcal{X}_F\propto\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial}{\partial x_3}$ となり，この集合は $x_2+x_3=Const$ と fibration される。

§3. 具体例での解析.

ここでは§1で得たPについて§2での幾何学的解析が正しい事（まだ完全ではない）をみてみる.

$$Pu=(D_1^2-(x_1+1)D_2^2+D_3^2)u=0 \qquad x_1>0$$

をx_2, x_3方向にFourier変換してみると.

$$0=(D_1^2+(x_1+1)\eta_2^2-\eta_3^2)\hat{u}=(D_1^2+\eta_2^2(x_1+1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}))\hat{u}$$

$$\therefore \hat{u}(x_1,\eta_2,\eta_3)=C_1(\eta_2,\eta_3)A(e^{\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\cdot(x_1+1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}))+C_2(\eta_2,\eta_3)A(e^{-\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}(x_1+1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}))$$

但しここで$A(z)$は$A''(z)-zA(z)=0$を満たし，その漸近展開が

$$A(z)\sim C\cdot z^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} \quad (|\arg z|<\pi,\ |z|\to\infty)$$

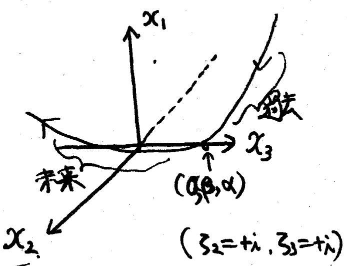
となる整関数（Airy関数）である。以下uを$F'=\{x_1=\zeta_1=0,\ \zeta_2=\zeta_3=+i\infty\}$の超局所近傍で考えているのであるが.（$\zeta_1=i\eta_1, \zeta_2=i\eta_2, \zeta_3=i\eta_3$として$\eta$は実数を表わす.）そこでは$\hat{u}$の第一項は境界から出て未来に進む成分，第2項は過去に進む成分を表わしている.

つまり，$Pu=0$の解は，$x_1>0$ではマイクロ関数としては，Pの陪特性帯と横断的な面上の関数を，陪特性帯上一定として，R^n上の関数に拡張したような関数，いわば$\{\frac{\partial}{\partial x_1}u=0\}$と本質的には同じである．しかし．$F'=\{x_1=\eta_1=0,\ \eta_2=\eta_3=+\infty\}$においては$P$の陪特性帯は$F'$に接して入ってくる。その為$F'$の各点から出る陪特性帯は2本となるのであるが，その一つは未来（つまり$x_1\to+\infty$の時，$x_2\to+\infty$），もう一つは過去（$x_1\to+\infty$で$x_2\to-\infty$）に向かう.

※ $\sigma(p) = \zeta_1^2 - (x_1+1)\zeta_2^2 + \zeta_3^2$ の陪特性帯は次の通り.

$$\begin{cases} \zeta_2,\ \zeta_3 \text{ は一定.} \\ x_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_3}\right)^2 (x_3-\alpha)^2 + \left(\frac{\zeta_3}{\zeta_2}\right)^2 - 1 \\ x_2 = -\frac{1}{12}\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_3}\right)^3 (x_3-\alpha)^3 - \left(\frac{\zeta_3}{\zeta_2}\right)(x_3-\alpha) + \beta \\ \zeta_1 = \frac{\zeta_2^2}{2\zeta_3}(x_3-\alpha) \end{cases}$$

(α, β は実定数)



※

そして. C_1. C_2 はその陪特性帯と横断的な面上の関数. いわば入射波と出射波の成分を表わしていると考えられる. しかし C_1 と C_2 の関係は任意ではなくて. $\hat{u}|_{x_1=0} = 0$ という境界条件によって結びつけられている. そこで今. この混合問題の適切性とは. 入射波の成分 C_2 によって. C_1 があらわされて. 実際それらが境界値問題の解になっている事と理解しよう. 実際. 形式的に.

$$C_1 = -\frac{A\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right)}{A\left(e^{\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right)} C_2$$

($A(z)$ は $\mathbb{C} - (-\infty, 0)$ には zero をもたない事が知られている)

とおけば Dirichlet 条件はみたされるが. $\forall\, C_2(\eta_2, \eta_3)$ に対して上の C_1. C_2 から作った $\hat{u}$ が本当に解になるか. 言い換えれば C_2 を任意の緩増加関数とした時.

$$\hat{u} = \left\{ -\frac{A\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right)}{A\left(e^{\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\cdot\left(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right)} A\left(e^{\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\left(x_1+1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right) + A\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\left(x_1+1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right) \right\} \cdot C_2$$

が $x_1 \geq 0$ で再び (η_2, η_3) について緩増大になるかを見る必要がある. しかしそれは. $A(z)$ の最初に述べた漸近展開と.

$A(e^{-\frac{\pi}{3}i}z) - e^{-\frac{\pi}{3}i}A(e^{\frac{\pi}{3}i}z)$ が $z \in \mathbb{R}$ 上で緩増大になっている事から容易に知られる。従って入射波の成分 C_2 を与えれば C_1 や $\hat{C}_1$ が Dirichlet 条件のもとに逆 Fourier 変換可能な関数としていつでも求まる事がわかった。（しかしその逆に C_1 を任意に与えても C_2 や $\hat{C}_1$ はきまらない事もわかる。これは波動現象の因果性からそうなるのであって、反射の場合と大きく異なっている。）

今まで述べて来た事は Fourier Space で考えているから、これを超局所的に捉えるには、$\hat{C}_2 \to \hat{C}_1$, $\hat{C}_2 \to u$ を対応させる核関数.（それは上に述べた通り、そのフーリエ変換はわかっている。）の特異スペクトルを評価して、どんな $\hat{C}_2$ に対してならそれらの核関数と convolution できるかをみればよい。例えば $\hat{C}_2 \to \hat{C}_1$ に対する核関数

$$K(x_2, x_3) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right)}{A\left(e^{\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}\right)\right)} e^{i(\eta_2 x_2 + \eta_3 x_3)}\, d\eta_2\, d\eta_3.$$

の特異スペクトルは、ラドン変換の考え方と、積分路変更によって直接評価できて、

$$\begin{aligned} S\text{-}SK \subset &\left\{ x_2 = x_3 = 0,\ |\eta_3/\eta_2| \geqq 1 \right\} \cup \left\{ \eta_3/\eta_2 = 1,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_2 \geqq 0 \right\} \\ &\cup \left\{ \eta_3/\eta_2 = -1,\ x_2 - x_3 = 0,\ x_2 \geqq 0 \right\} \cup \left\{ \eta_3/\eta_2 = \theta,\ \begin{matrix} x_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{1-\theta^2}(2\theta^2+1) \\ x_3 = 4\theta\sqrt{1-\theta^2} \end{matrix}\ \ |\theta| \leqq 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。（多分等号が成立する。）このうち第2番目と第3番目が回折波を表わす。

（注）. F. G. Friedlander, R. B. Melrose の 1976年8月の論文.

"The wave front set of the solution of a simple initial-boundary value problem with glancing rays II."
の中の. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A'(e^{\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}))}{A(e^{\frac{\pi}{3}i}|\eta_2|^{\frac{2}{3}}(1-\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2}))}\,d\eta_2 d\eta_3$ などの解析的特異性も上と全く同様の方法.(むしろ大分易しい)で評価できる.※

いずれにしてもこれらの特異性の評価により.入射波を超局所的に与えた時.上の核関数を使って u や出射波を構成する事ができる.但し.Kの特異性をみてもわかる様に、Kはいわゆる micro local operator にはならないから.$\hat{c}_2$ とKが convolution できるには.$\hat{c}_2(x_2, x_3)$ が x_2, x_3 がある程度より小さければ0になっているという一種の台の semi-proper 性が必要である.しかしこの事は回折現象というものの性質上当然の事であって.問題の超局所化を何ら妨げるものではない。

以上肝心な詳細を省略したり.言葉が到らぬ点が数多くありますが.超局所解の一意性などまだ肝心の所で証明ができていないのでそれらの事は別の機会にゆずる事にしてこの辺で終わりたいと思います。