数理解析研究所講究録
289巻 1977年 82-95

Stolz homomorphism と Oricycle homomorphism

和歌山大 教育 貴志 一男

§1 序

単位開円板D上の有界正則関数の全体からなるBanach環 $H^\infty(D)$ の極大イデアル空間を $\bar{D}$ とする．単位円C上の点1を頂点とするStolz角領域Aの $\bar{D}$ における閉包 $\bar{A}$ に対し，$\bar{A}\setminus A$ に属する点をStolz homomorphismといい，Stolz homomorphismsの全体を $\mathcal{S}$ とする．ここでは，$\mathcal{S}$ は連結集合であること，$\mathcal{S}$，$\bar{\mathcal{S}}$ はそれぞれGleason partの和集合であること，その他二，三の性質を述べる．

次に点1で単位円Cに接するD内の二つの円によって囲まれるOricycle領域Aに対し，$\bar{A}\setminus A$ に属する点をOricycle homomorphismといい，Oricycle homomorphismsの全体を $\mathcal{O}$ とするとき，$\mathcal{S}$ で述べたと同様な性質を $\mathcal{O}$ について考察する．

§2 準備

Carlesonの結果から単位開円板Dは Banach 環$H^\infty=H^\infty(D)$の極大イデアル空間$\overline{D}$で稠密である。D上連続な関数fが$\overline{D}$上の連続な関数に拡張できるとき，この拡張した関数を$\hat{f}$で表す。uをDで上方(または下方)に有界な調和関数とし，vをuの共役調和関数とすると，$f=\exp(u+iv)$ (または$f=\exp(-u-iv)$) がH^∞に属し，$\hat{u}=\log|\hat{f}|$ (または$\hat{u}=-\log|\hat{f}|$) を用いて，uを$\overline{D}$上の連続関数$\hat{u}$に拡張できる。

集合$A(\subset\overline{D})$の$\overline{D}$における閉包を$\overline{A}$で表す。また$\overline{A}\cap(\overline{D}\setminus D)$を$A'$で表す。とくに$D'=\overline{D}\setminus D$である。関数$f(z)=z$に対して$D_\alpha=\{z\in D' : \hat{f}(z)=\alpha\}$ $(|\alpha|=1)$を点α上の fiber という。

単位円周C上の Lebesgue 測度$d\theta$による$L^\infty(d\theta)$を$L^\infty(C)$で，$L^\infty(C)$の極大イデアル空間をXで表す。$X\subset D'$である。H^∞の Gelfand 表現$\hat{H}^\infty$のXへの制限$\hat{H}^\infty|X$がX上の logmodular 環で，Xは$\hat{H}^\infty|X$の Šilov 境界である。H^∞と$\hat{H}^\infty|X$は同一視することがある。$X_\alpha=X\cap D_\alpha$とおく。

関数$u^*\in L^\infty(C)$の Poisson 積分

$$u(z)=P_z(u^*)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^*(e^{i\varphi})\,P_r(\theta-\varphi)\,d\varphi$$

$$z=re^{i\theta},\quad 0\leq r<1,\quad P_r(\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

はD上の有界複素調和関数である。$u^*\longmapsto u^\circ=\hat{u}|X$によって定義される写像によって$L^\infty(C)$と$C(X)$は Banach 環として(等距離的)同型である。特にC上の Lebesgue 可測集合Aの特性関

数 $u^*=\chi_A$ に対し，u^s は X 上の開かつ閉な集合 $A^s=\{x\in X:\hat{\chi}_A(x)=1\}$ の特性関数である。この $u^*=\chi_A$ に対し $u=\mu(\cdot,A)$ すなわち $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi_A(e^{i\varphi})P_r(\theta-\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_A P_r(\theta-\varphi)d\varphi=\mu(z,A)$ は（zにおける）A の調和測度である。$u^*\in L^\infty(C)$ に対し

$$u(z)=\int_C u^*(\xi)\mu(z,d\xi)\ ,\quad z\in D$$

が成立する。

$u^*\in L^\infty(C)$ とする。上で述べた (u^*,u,u^s) と $z\in\bar{D}$ に対し，写像 $u^s\longmapsto\hat{u}(z)$ は $C(X)$ 上の線形汎関数で，X 上確率測度 $\nu(z,\cdot)$ によって

$$\hat{u}(z)=\int_X u^s(\xi)\,\nu(z,d\xi)=\int_X \hat{u}(\xi)\,\nu(z,d\xi)\ ,\quad z\in\bar{D}$$

と表される。特に上式が $u\in H^\infty$ に対し成立し，$\nu(z,\cdot)$ は H^∞ に対するその表現測度である。X 上の測度空間の *弱位相によって $\nu(z,\cdot)$ は $z\in\bar{D}$ の連続関数である。特に A^s が開かつ閉な集合であるときは $\nu(\cdot,A^s)|D=\mu(\cdot,A)$ が D 上の調和関数で，$\bar{D}$ 上の連続関数 $\nu(\cdot,A^s)=\hat{\mu}(\cdot,A)$ に拡張できる。

$\mathbb{E}_1=\{E\subset D: E^{cl}\cap C=\emptyset\}$（ここで E^{cl} は平面上の E の閉包を表す。以下同様）とおく。また $z,w\in D$ に対し $\chi(z,w)=\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$ とおく。$E\subset D$, $0<\delta<1$ に対し

$$E^\delta=\{z\in D:\ \chi(s,z)<\delta \text{ for some } s \text{ in } E\}$$

とおく。$E\in\mathbb{E}_1$ に対し，$E'(=\bar{E}\setminus D)$ と交わる Gleason part の全体からなる集合を $\rho(E)$ で表す。ときには $\bigcup_{P\in\rho(E)}P$ をまた

$\mathcal{P}(E)$で表す。$z, w \in \bar{D}$ が同じGleason partに属するとき $z \sim w$ と表す。$z \in \bar{D}$ を含むGleason部分を $P(z)$ とかく。

定理2.1. $E, F \in \mathbb{E}_1$ とする。このとき $\mathcal{P}(E) \supset \mathcal{P}(F)$ であるための必要十分条件はある δ $(0<\delta<1)$ が存在して $E^{\delta} \supset F$ となることである。(Rosenfeld - Weiss [4], Theorem 3.2.)

§3 Stolz homomorphism

定義. $S_\alpha = \bigcup\{A' :$ A は $\alpha \in C$ を頂点とするStolz角領域$\}$ $(\subset D_\alpha)$ に属する点を点 α におけるStolz homomorphismという。

以下 $S = S_1$ のみを取り扱う。

Dで有界調和関数である $u(z) = \arg(1-z)$ $(-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2})$ に対して

(3.1) $\quad S = \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\}$, $\{\hat{u}(z) ; z \in S\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

が成立する。

$M = \{e^{i\theta} : 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$ とおき、$z \in D$ における M の調和測度を $\mu(z, M)$ で表す。$z_0 \in D$ に対して

$$\Gamma = \{z \in D : \mu(z, M) = \mu(z_0, M)\}$$

とおくと、Γ は三点 $-1, z_0, 1$ を通る円と D の共通部分である。そして $z \in \Gamma$ に対して $\mu(z, M) = \frac{\delta}{\pi}$ $(\in (0,1))$ である。ただし δ は Γ と弧 $C \setminus M$ のなす角である。$z \in \Gamma'$ とすると、z に収束するネット $\{z_\alpha\}$ $(\subset \Gamma)$ が存在して、$\mu(z_\alpha, M) \to \nu(z, M_1^S)$

(ただし $M_1^S = M^S \cap X_1$)．よって $\nu(z, M_1^S) = \frac{\delta}{\pi}$ である．これから $S \subseteqq \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1\}$ を得る．$\supseteqq$ も容易にわかり

(3.2)　$S = \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1\}$，$\{\nu(z, M_1^S) : z \in S\} = (0, 1)$

が成立する．

(3.2) から次のことがわかる．

(3.3)　$D_1 \setminus S = H^\infty\text{-hull}(M_1^S) \cup H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^S)$

$$H^\infty\text{-hull}(M_1^S) \cap H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^S) = \phi .$$

補題 3.1.　$u(z) = \arg(1-z)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}\right)$ とする．$\Gamma = \{z \in D : \mathrm{Re}\, z \geqq 0,\ u(z) = \alpha\}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ ならば Γ' は連結集合である．

証明．$\Gamma_r = \Gamma \cap \{z \in D ; |z-1| < r\}$ $(0 < r < 1)$ とおくとき，

$$\Gamma' = \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$$

となる．まず $\subseteqq$ となること．$\varphi \in \Gamma'$ に対し，φ に収束するネット $\{\varphi_\alpha\} \subset \Gamma$ が存在する．このとき $\varphi_\alpha(z) \to \varphi(z) = 1$ であるから，任意の $r > 0$ に対し，ある α_0 があって，$\alpha \geqq \alpha_0$ のとき $|\varphi_\alpha(z) - 1| < r$．ゆえに $\varphi_\alpha \in \Gamma_r$，ゆえに $\varphi \in \overline{\Gamma_r}$．ゆえに $\Gamma' \subseteqq \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$．つぎに $\supseteqq$ となること．明らかに，$\left(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}\right) \cap D = \phi$，ゆえに $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subset D'$，ゆえに $\left(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}\right) \cap \overline{\Gamma} \subset D' \cap \overline{\Gamma}$ から $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subseteqq \Gamma'$．

いま Γ' が不連結集合であるとすると，$\Gamma' = A_1 \cup A_2$，$A_1 \neq \phi$，

$A_2 \neq \phi$, $A_1 \cap A_2 = \phi$, A_1, A_2 はコンパクト集合となる。このとき $U(\Gamma') = U(A_1) \cup U(A_2)$, $\overline{U(A_1)} \cap \overline{U(A_2)} = \phi$ となるものがある。ただし $U(\Gamma')$, $U(A_1)$, $U(A_2)$ はそれぞれ Γ', A_1, A_2 の $\hat{D}$ 近傍である。このとき，ある Γ_{r_0} が存在して，$\Gamma' \subset \overline{\Gamma_{r_0}} \subset U(\Gamma')$ となり，$\overline{\Gamma_{r_0}}$ は不連結集合となり，矛盾である。　(証明終)

定理3.2. (i) S は D' の開集合である。

(ii) S は連結集合である。

証明. (i)の証明. (3.2)式から $S = \{z \in D_1 ;\ 0 < \nu(z, M_1^s) < 1\}$ であるから S は D_1 の相対開集合である。また関数 $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ を考えると，$D' \setminus D_1$ 上で $|\hat{f}(z)| = 1$ であるから，$\overline{D' \setminus D_1}$ 上で $|\hat{f}(z)| = 1$. 一方 S 上で $f(z) = 0$ であるから $\overline{S}$ 上で $\hat{f}(z) = 0$。よって

$$S \subset D' \setminus (\overline{D' \setminus D_1}) \subset D_1$$

ゆえに S は D' の開集合である。

(ii)の証明. $u(z) = \arg(1-z)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。$\Gamma = [0, 1)$ とおくとき，$z_0 \in \Gamma'$ に対して

$$S = \bigcup_{w \in p(z_0)} \Gamma_w'$$

が成立する。ただし Γ_w は，$\hat{u}(w) = \alpha$ とするとき，$\Gamma_w = \{z \in D : \mathrm{Re}\, z \geq 0,\ u(z) = \alpha\}$ を満たす集合である。

なぜならば z が S に属するならば $\hat{u}(z) = \beta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$. そこで $\Gamma_1 = \{z \in D : \mathrm{Re}\, z \geq 0,\ u(z) = \beta\}$ とするとき，ある δ が存

在して，$[0,1)^{\delta}\supset\Gamma_1$，$\Gamma_1^{\delta}\supset[0,1)$であるから，定理2.1から $\rho(\Gamma_1)=\rho([0,1))$．ゆえに $\Gamma_1'\cap P(z_0)\neq\phi$．ゆえに $S\subseteqq\bigcup_{w\in P(z_0)}\Gamma_w'$．また $S\supseteqq\bigcup_{w\in P(z_0)}\Gamma_w'$ は明らかであるから，$S=\bigcup_{w\in P(z_0)}\Gamma_w'$ である。

$P(z_0)$ は連結集合であり（Wermer の埋めこみ定理），補題3.1から Γ_w' は連結集合であるから，S は連結集合である．

（証明終）

定理3.3．D' 中での D_1 の位相境界 $D_1\cap\overline{(D'\setminus D_1)}$ を C_B とすると，C_B は Gleason part の和集合である。（Weiss [6], p.96).

$z\in D_1\setminus C_B$ とすると，D 中のある可算集合 E で，$E^{cl}\cap C=\{1\}$（すなわち $E\in\mathbb{E}_1$）で，$z\in\overline{E}$ を満たすものが存在する。（Weiss [6], p.96)

$C_B\supset X_1$ である。

定理3.4．D 上の調和関数 u が

$$u(z)=u(re^{i\theta})=\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\varphi)\,d\mu(\varphi)$$

と表されて $\overset{\text{るとし}}{\text{いて}}$，$a=\inf\limits_{D}u>-\infty$，$\mu(\{1\})=0$ を仮定する，さらに $B\in\mathbb{E}^1$ に対して $\lim\limits_{\substack{z\in B\\ z\to 1}}u(z)=a$ と仮定する。

このとき，$A=\{z\in D_1:\hat{u}(z)>a\}$ に対して D 上の非負調関数 v で，

$$\hat{v}(B')=0,\quad \hat{v}(A)=+\infty$$

を満たすものが存在する。 (Doob [1], p. 193)

注意. u が D で有界調和関数ならば，(円周上の Lebesgue 測度にかんして)ほとんどすべての θ について $u^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} u(re^{i\theta})$ が存在して，$u^* \in L^\infty(T)$ かつ $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) u^*(e^{i\varphi}) d\varphi$ である (Fatou の定理). よって $d\mu = u^* d\theta/2\pi$ に対して $\mu(\{1\}) = 0$ である。

定理 3.5. (i) $z_0 \in S$ に対して $P(z_0) \subset S$ である。

(ii) $z_0 \in S$ とする. D 上の調和関数 $u(z) = \arg(1-z)$ $(-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2})$ に対し $\{\hat{u}(z) : z \in P(z_0)\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ である。また $z \in P(z_0)$ の表現測度 $\nu(z, \cdot)$ については $\{\nu(z, M_1^s) ; z \in P(z_0)\} = (0, 1)$ である。ただし，$M = \{e^{i\theta} ; 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$ で $M_1^s = \{x \in X : \hat{\chi}_A(x) = 1\} \cap D_1$ である。

(iii) $z_0 \in \overline{S}$ に対して $P(z_0) \subset \overline{S}$ である。

証明. (i) の証明. $w \in D_1 \setminus S$ ならば $\nu(w, M_1^s) = 1$ または $\nu(w, X_1 \setminus M_1^s) = 1$ である. $\nu(w, M_1^s) = 1$ ならば $\nu(w, X_1 \setminus M_1^s) = 0$ である. 一方 (3.2) 式から，$z \in S$ に対して $\nu(z, X_1 \setminus M_1^s) > 0$. よって $\nu(z, \cdot)$ は $\nu(w, \cdot)$ に関して絶対連続にならない. したがって z と w は同じ Gleason part に属さない. $\nu(w, X_1 \setminus M_1^s) = 1$ としても同様な結論を得る。

(ii) の証明. $P(z_0) \subset S$ であることと (3.1) 式から

$$\{\hat{u}(z) : z \in P(z_0)\} \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

を得る．いま $\hat{u}(z_0)=\alpha_0$ とし，$\Gamma_0=\{z\in D:\ \mathrm{Re}\,z\geq 0,\ u(z)=\alpha_0\}$ とすると $\Gamma_0'\ni z_0$ である．任意の $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ に対して $\Gamma=\{z\in D;\ \mathrm{Re}\,z\geq 0,\ u(z)=\alpha\}$ とおく。このときある $\delta\ (0<\delta<1)$ が存在して $\Gamma_0^{\delta}\supset\Gamma$ かつ $\Gamma^{\delta}\supset\Gamma_0$ である．ゆえに定理2.1から $\rho(\Gamma)=\rho(\Gamma_0)$．ゆえに $\Gamma'\cap P(z_0)\neq\phi$．このとき $w\in\Gamma'\cap P(z_0)$ に対して $\hat{u}(w)=\alpha$．ゆえに $\{\hat{u}(z):\ z\in P(z_0)\}=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ である。

$\{v(z,M_1^s):\ z\in P(z_0)\}=(0,1)$ なることも同様に証明できる。

(iii)の証明．$\bar{S}\cap C_B=\phi$ であるから（定理3.2の(i)の証明参照），定理3.3を用いて，任意の $z\in\bar{S}$ と任意の $w\in C_B$ は同じGleason partに属さない，ゆえに任意の $z\in\bar{S}$ と任意の $w\in D_1\setminus(\bar{S}\cup C_B)$ が同じ Gleason part に属さないことを示せばよい。

$u(z)=\arg(1-z)\ (-\frac{\pi}{2}<u(z)<\frac{\pi}{2})$ はDで有界調和関数である．$A=\{z\in D_1:\ -\frac{\pi}{4}<\hat{u}(z)\}^{-}$ とおき $D_1\setminus(A\cup C_B)$ に属する一点 z_1 をとる。

$z_1\notin C_B$ よりある（可算）集合で $E^{cl}\cap C=\{1\}$, $\bar{E}\ni z_1$ を満たすものがある。よって z_1 に収束するあるネット $\{z_\alpha\}(\subset E)$ が存在する。いま z_1 のあるD近傍 $V(z_1)$ で $V(z_1)\cap(A\cup C_B)=\phi$ を満たすものをとると，ある添数 α_0 があって $\alpha\geq\alpha_0$ ならば $z_\alpha\in V(z_1)$． $B=\{z_\alpha:\ \alpha\geq\alpha_0\}(\subset D)$ に対し $B^{cl}\cap C=\{1\}$

で，$\lim_{\substack{z\in B\\ z\to 1}} u(z) = -\frac{\pi}{2}$ である．

このとき D 上の非負調和関数 v で

$$\hat{v}(B') = 0, \quad \hat{v}(A) = +\infty$$

を満たすものが存在する（定理 3.4）．v_1 を v の共役調和関数とし，$f = \exp(-v - iv_1)$ とおくと，$f \in H^\infty(D)$, $\|f\| \leqq 1$,

$$|\hat{f}| = \exp(-\hat{v}) = \begin{cases} 1 & (z = z_0) \\ 0 & (z \in A) \end{cases}$$

ゆえに，z_1 と任意の $z \in A$ は同じ Gleason part に属さない．

u の代わりに $u_1 = -u$ を用いることにより，上と同様に $A_1 = \{z \in D_1 : \hat{u}_1(z) > -\frac{\pi}{2}\}$ とおくと，任意の $z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$ と任意の $z \in A_1$ は同じ Gleason part に属さない．

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \{z \in D_1 : -\tfrac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \tfrac{\pi}{2}\} \\ &= \{z \in D_1 : -\tfrac{\pi}{2} < \hat{u}(z)\} \cap \{z \in D_1 : \hat{u}(z) < \tfrac{\pi}{2}\} \\ &= A \cap A_1 \end{aligned}$$

$z_1 \in D_1 \setminus (\bar{S} \cup C_B)$ ならば $z_1 \in D_1 \setminus (A \cup C_B)$ または $z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$ である。$z_1 \in D_1 \setminus (A \cup C_B)$ ならば任意の $z \in A$ に対して $z_1 \not\sim z$．よって任意の $z \in A \cap A_1$ に対し $z_1 \not\sim z$．$z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$ としても同様に任意の $z \in A \cap A_1$ に対して $z_1 \not\sim z$．　（証明終）

§4 Oricycle homomorphism

点 1 で単位円 C に接する D 内の円を点 1 における Oricycle

という．また点1における二つのOricycleに囲まれる領域を点1におけるOricycle領域という。点1における一つのOricycle Γ に対して $\{z\in\Gamma:\ \mathrm{Im}\,z\geqq 0\}$, $\{z\in\Gamma;\ \mathrm{Im}\,z\leqq 0\}$ をそれぞれ Γ のupper oricycle, lower oricycle という。点1におけるupper oricycle領域, lower oricycle領域も同様に定義する。

定義．$\mathcal{O}=\bigcup\{A':\ A$ は点1におけるOricycle領域$\}$ に属する点をOricycle homomorphism という．また，$\mathcal{O}^+=\bigcup\{A':\ A$ は点1におけるupper oricycle 領域$\}$ に属する点をupper oricycle homomorphism という．$\mathcal{O}^-=\bigcup\{A';\ A$ は点1におけるlower oricycle 領域$\}$ に属する点をlower oricycle homomorphism という。

$$\mathcal{O}^+\subset H^\infty\text{-hull}\,M_1^s\ ,\quad \mathcal{O}^-\subset H^\infty\text{-hull}\,(X_1\setminus M_1^s)$$

である，ただし $M=\{e^{i\theta}:\ 0\leqq\theta\leqq\pi\}$, $M_1^s=\{x\in X:\ \hat{\chi}_M(x)=1\}$ である．((3.3)式参照) $\mathcal{O}=\mathcal{O}^+\cup\mathcal{O}^-$, $\overline{\mathcal{O}^+}\cap\overline{\mathcal{O}^-}=\phi$ であるから $\mathcal{O}$ は不連結である．

定理 4.1. (i) $\mathcal{O}^+,\ \mathcal{O}^-$ はそれぞれ D' の開集合である。

(ii) $\mathcal{O}^+,\ \mathcal{O}^-$ はそれぞれ連結集合である．

証明．(i)の証明．$f(z)=\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ を考えると，$D'\setminus D_1$ 上では $|\hat{f}(z)|=1$ で，$\mathcal{O}=\{z\in D_1;\ 0<|\hat{f}(z)|<1\}$ であるから $\mathcal{O}=\{z\in D';\ 0<|\hat{f}(z)|<1\}$ となり $\mathcal{O}$ が D' で開集合である．ゆえに $\mathcal{O}^+$,

O^- は D^- の開集合である。

(ii) $z_0 \in O^+$ を一つ固定する．このとき，ある upper oricycle Γ_0 が存在して $\Gamma_0' \ni z_0$ である．$w \in P(z_0)$ に対して upper oricycle Γ_w を次のように定義する．

$$\Gamma_w = \{z \in D ; \operatorname{Im} z \geqq 0, |f(z)| = c\}, \quad \text{ただし } c = |\hat{f}(w)|$$

（この Γ_w は中心 $\left(\frac{k}{k-1}, 0\right)$，半径 $\frac{1}{1-k}$（ただし $\log c = k$）の upper oricycle である）このとき

$$O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$$

である。なぜならば $z \in O^+$ ならば $|\hat{f}(z)| = l$ $(0 < l < 1)$．$\Gamma = \{z \in D : \operatorname{Im} z \geqq 0, |f(z)| = l\}$ とおく．このときある δ が存在して $\Gamma_0^{\delta} \supset \Gamma$ でかつ $\Gamma^{\delta} \supset \Gamma_0$ であるから，定理2.1から $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_0)$。ゆえに $\Gamma' \cap P(z_0) \neq \phi$．よってある $w \in P(z_0)$ に対して $\Gamma = \Gamma_w$。ゆえに $O^+ \subseteqq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$。$O^+ \supseteqq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ は明らかであるから，$O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$．

補題3.1と同様な証明により Γ_w' は連結集合であることがわかり，これと $P(z_0)$ の連結性から O^+ の連結性を得る．

（証明終）

定理4.2. (i) $z_0 \in O^+$ に対して $P(z_0) \subset O^+$ である．

(ii) $z_0 \in O^+$ とする．関数 $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ に対して，

$\{|\hat{f}(z)| : z \in P(z_0)\} = (0, 1)$ である．

O^- に対しても同様なことが成立する．

証明. (i)の証明. 先ず $z_0 \in O$ ならば $P(z_0) \subset O$ となることを示す。このためには任意の $w \in D_1 \setminus O$ と z_0 が同じ Gleason 部分に属さないことを示せばよい。

$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ に対して $O = \{z \in D_1 ; 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$ であるから，$|\hat{f}(w)| = 1$ または $\hat{f}(w) = 0$ である。

(a) $|\hat{f}(w)| = 1$ のとき. $F = \dfrac{f - \hat{f}(z_0)}{1 - \overline{\hat{f}(z_0)}\, f}$ とおくと，F は $H^\infty(D)$ に属する inner function である。$\hat{F}(z_0) = 0$，$|\hat{F}(w)| = 1$ であるから

$$\sigma(z_0, w) = \sup\{\, |\hat{f}(w)| \,;\, f \in H^\infty(D),\ \|f\| \leqq 1,\ \hat{f}(z_0) = 0 \,\}$$
$$= 1 .$$

よって z_0 と w が同じ Gleason 部分に属さない.

(b) $\hat{f}(w) = 0$ のとき. D で $f \neq 0$ であるから Royden の補題 (Hoffman [2], Lemma 2.2) より，$P(w)$ 上で $\hat{f} = 0$. 他方 $0 < |\hat{f}(z_0)| < 1$. ゆえに $z_0 \notin P(w)$.

以上から $P(z_0) \subset O$ となることがわかった. 次に $z_0 \in O^+$ ならば $P(z_0) \subset O^+$ となること，これは $O = O^+ \cup O^-$，$\overline{O^+} \cap \overline{O^-} = \phi$ と $P(z_0)$ の連結性から従う.

(ii)の証明. $z_0 \in O^+$ ならば $P(z_0) \subset O^+$ で，$\{|\hat{f}(z)| ; z \in O\} = (0, 1)$ なることから $\{|\hat{f}(z)| ; z \in P(z_0)\} \subseteqq (0, 1)$ である.

ある upper oricycle Γ_0 が存在して $\Gamma_0' \ni z_0$ である。任意の $c \in (0, 1)$ に対して $\Gamma_1 = \{z \in D ; \mathrm{Im}\, z \geqq 0,\ |f(z)| = c\}$ とお

くと，Γ_1 は upper oricycle である．このときある δ $(0<\delta<1)$ が存在して $\Gamma^{\delta} \supset \Gamma_1$，$\Gamma_1^{\delta} \supset \Gamma$ である．ゆえに定理2.1 から $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_1)$．ゆえに $\Gamma_1' \cap P(z_0) \neq \phi$．ゆえにある $z \in P(z_0)$ に対して $|\hat{f}(z)| = c$．これから $\{|\hat{f}(z)| : z \in P(z_0)\} = (0, 1)$ である．　　　　（証明終）

文　献

[1] J. L. Doob, Boundary approach filters for analytic function. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973), 187–217.

[2] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. Math. 86 (1967), 74–111.

[3] A. Kerr-Lawson, A filter description of the homomorphisms of H^{∞}, Canad. J. Math., 17 (1965), 734–757.

[4] M. Rosenfeld and M. L. Weiss, Bounded analytic functions tending radially to zero, Proc. London Math. Soc., 18 (1968), 714–726.

[5] ——————, A function algebra approach to a theorem of Lindelöf, J. London Math. Soc., 2 (1970), 209–215.

[6] M. L. Weiss, Some separation properties in sup-norm algebras of continuous functions, 93–97, in Function algebras, Scott, Foresman, 1966.