数理解析研究所講究録
289巻 1977年 1-13

Toeplitz作用素について

東北大 理　勘甚裕一

§1. ここでは，Toeplitz作用素について，その最っとも基本的な場合である，下の空間が$\mathbb{T}$のときと$\mathbb{R}$のときについていくつかの結果をindex theoryに重点をおいて述べる．

まず，Wiener-Hopf equationと呼ばれる古典的な方程式から話しをはじめる．$L^p(\mathbb{R})$，$L^p(\mathbb{R}^+)$をそれぞれ$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$，$\mathbb{R}^+=[0,\infty)$上で定義されたLebesgue測度に関するLebesgue spaceとする．$k\in L^1(\mathbb{R})$に対してHilbert space $L^2(\mathbb{R}^+)$上に作用するoperator $\hat{W}_k$を次で定義する；

$$\hat{W}_k f(x) = \int_0^\infty k(x-t) f(t)\,dt \qquad (f\in L^2(\mathbb{R}^+))$$

このとき$\hat{W}_k f$はa.e. xに対して定義され$\|\hat{W}_k f\|_2 \le \|k\|_1 \|f\|_2$である．$\lambda\in\mathbb{C}$，$g\in L^2(\mathbb{R}^+)$に対して，

$$(1) \qquad \lambda f + \hat{W}_k f = g$$

をWiener-Hopf equationという．ここでfは未知函数．

$H^2(\mathbb{R}) = \{ f\in L^2(\mathbb{R})$；$f$は，上半平面で正則かつ

$$\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy)|^2dx<\infty$$

を満す函数$F(z)$の境界函数とすればPaley-Wienerの定理からFourier変換は$L^2(\mathbb{R}^+)$から$H^2(\mathbb{R})$上への自然な同型を与える。いまPを$L^2(\mathbb{R})$から$H^2(\mathbb{R})$上へのorthogonal projectionとすれば(1)はFourier変換$\mathcal{F}$によって、

$$(2)\quad \mathcal{F}(\lambda f+\hat{W}_k f)=P[(\lambda+\hat{k})\hat{f}]=\hat{g}$$

なる形に変換される。但し$\hat{f},\hat{g},\hat{k}$はf,g,kのFourier変換である。このようにして積分作用素はProjectionを伴った掛算作用素に変換される。$\lambda+\hat{k}$はcontinuous, $\lim_{|z|\to\infty}(\lambda+\hat{k}(z))=\lambda$であるが、この性質は(2)においては必要ない。このことから我々はWiener-Hopf operatorの一般的な定義を次の様に与える。$\varphi\in L^\infty(\mathbb{R})$に対して、

$$W_\varphi f=P(\varphi f)\qquad(f\in H^2(\mathbb{R}))$$

をsymbol φをもつWiener-Hopf operatorという。

次にWiener-Hopf operatorのdiscreteな場合を考る。$l^p(\mathbb{Z})$, $l^p(\mathbb{Z}^+)$をそれぞれ$\mathbb{Z}=\{\cdots,-1,0,1,2,\cdots\}$, $\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$上の$p$乗絶対収束なcomplex-valued functions全体とする。$k\in l^1(\mathbb{Z})$に対して$l^2(\mathbb{Z}^+)$上のoperator $\hat{T}_k$を次で定義する;

$$(3)\quad \hat{T}_k f(n)=\sum_{m=0}^{\infty}k(n-m)f(m)\quad(f\in l^2(\mathbb{Z}^+)).$$

$e_n\in l^2(\mathbb{Z}^+)$を$e_n(m)=1\ (m=n)$, $e_n(m)=0\ (m\neq n)$で定義すれば$\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}^+}$は$l^2(\mathbb{Z}^+)$におけるorthogonal basisである

この basis に関する operator $\hat{T}_k$ の matrix は $\begin{bmatrix} k(0) & k(1) & k(2) & \cdots \\ k(-1) & k(0) & k(1) & \cdots \\ k(-2) & k(-1) & k(0) & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$.

この matrix の特徴は対角線にそって定数であることである。このような matrix は Toeplitz によって最初に研究され、Toeplitz matrix と呼ばれる。対応する $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上の operator を Toeplitz operator とよぶ。

Wiener - Hopf operator の時と同様、Fourier 変換を使うことによって見やすい形になる。$L^p(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}=\{e^{it}; 0\le t<2\pi\}$ 上の Lebesgue measure $dt/2\pi$ に関する Lebesgue space とする。Fourier 変換によって、$\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ は Hardy space $H^2(\mathbb{T})=\{f\in L^2(\mathbb{T})$; f は単位円板 D 上で正則かつ $\sup_{r<1}\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^2\,d\theta<\infty$ を満す函数 $F(z)$ の境界函数$\}$ に同型となる。P を $L^2(\mathbb{T})$ から $H^2(\mathbb{T})$ 上への projection とする。このとき、$\varphi\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}k(n)e^{int}$ とすれば (3) は、

$$(4)\quad T_\varphi f = P(\varphi f) \qquad (f\in H^2(\mathbb{T}))$$

なる形に変換される。このときも、φ は絶対収束する Fourier series をもつ必要はない。よって次の定義を与える。$\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して、

$$T_\varphi f = P(\varphi f) \qquad (f\in H^2(\mathbb{T}))$$

を symbol φ をもつ Toeplitz operator という。

Rosenbloom [7] によれば $[0,\infty)$ 上の Laguerre 函数の CON system に関する Wiener-Hopf operator の matrix は Toeplitz matrix になる．また Devinatz [4] は上半平面から単位円板 D 上への等角写像 $k(z)=(z-i)/(z+i)$ は Wiener-Hopf operator と，対応する Toeplitz operator との間の unitary equivalence を与えることを示した．よって多くの問題に関して２つの理論は同じものとなる．

次の節で symbol φ を連続函数の空間 $C(\mathbb{T})$ にとった場合の $H^2(\mathbb{T})$ 上の Toeplitz operator について考察する．とくに T_φ が invertible や Fredholm operator になる symbol φ の条件，さらに Fredholm operator になるときその index を考る．§3 では $H^2(\mathbb{R})$ 上の Wiener-Hopf operator について，その symbol を almost periodic functions にとった場合，さらに一般に symbol を finite regular Borel measure の Fourier-Stieltjes 変換にとった場合を述べる．§2 は R.G. Douglas [5]，§3 は R.G. Douglas - J.L. Taylor [6] に依る．Toeplitz operator に関する最近までの結果のほとんどと，詳細な文献が [5] に見られる．

§2. まず以下の議論に必要な定義や記号を与える．$\mathcal{H}$ を separable infinite dimension Hilbert space とし，$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上のすべての bounded linear operators のなす C^*-algebra とし，$\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の compact operators 全体のなす algebra とす

る．このとき，$\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ における unique closed two sided ideal である．i を inclusion map，π を natural homomorphism とすると

$$(0) \longrightarrow \mathcal{LC}(\mathcal{H}) \xrightarrow{i} \mathcal{L}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{LC}(\mathcal{H}) \longrightarrow (0)$$

は exact．

Def. 1. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が Fredholm operator とは $\pi(T)$ が invertible であること．$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の Fredholm operators 全体を表わすことにする．

Atkinson の定理によれば $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ である必十条件は T の range が closed かつ $\dim\ker T$, $\dim\ker T^* = \dim \operatorname{coker} T < \infty$．

Def. 2. $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ のとき T の analytic index $\operatorname{ind}_a(T)$ を $\operatorname{ind}_a(T) = \dim\ker T - \dim\ker T^*$ で定義する．

ind_a は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ から $\mathbb{Z}$ への continuous homomorphism であり compact perturbation のもとで不変である．

ここでは函数は $\mathbb{C}^n$-valued として §1 より一般な形で Toeplitz operator を定義し考察する．

$L^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上 $\mathbb{C}^n$-valued norm square-integrable measurable functions の作る Hilbert space，$H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})$ を対応する Hardy space とする．即ち，$L^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{C}^n$，$H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}) = H^2(\mathbb{T}) \otimes \mathbb{C}^n$．
$L^\infty_{M_n}(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上 $M_n = M_n(\mathbb{C}) = \{n \times n$ 複素 matrices$\}$ valued な bounded measurable functions 全体とする．このとき symbol

$\phi \in L^\infty_{M_n}(\mathbb{T})$ をもつ Toeplitz operator T_ϕ を $T_\phi f = P(\phi f)$ $(f \in H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}))$ で定義する．但し P は $L^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})$ から $H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})$ への orthogonal projection である．map $\xi(\phi) = T_\phi$ は $L^\infty_{M_n}(\mathbb{T})$ から $\mathcal{L}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}))$ への contractive $(\|\xi(\phi)\| \leq \|\phi\|)$ かつ $*$-linear である．しかし multiplicative, i.e. $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$，ではない．このことが Toeplitz operator の研究を困難なものにするとともに興味あるものとしている．ところがこの節の目的にとって有用な次の lemmas が成り立つ．

Lemma 2.1. $\phi \in H^\infty_{M_n}(\mathbb{T}),\ \psi \in L^\infty_{M_n}(\mathbb{T}) \Rightarrow T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi},\ T_{\phi^*} T_\psi = T_{\phi^*\psi}$

Lemma 2.2. $\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T}),\ \psi \in L^\infty_{M_n}(\mathbb{T})$

$$\Rightarrow T_\psi T_\phi - T_{\psi\phi},\ T_\phi T_\psi - T_{\phi\psi} \in \mathcal{LC}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})).$$

$\mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T}))$ を $\{T_\phi : \phi \in C_{M_n}(\mathbb{T})\}$ で生成された closed subalgebra とする．このとき，$\mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T}))$ は C^*-algebra でありその commutator ideal は $\mathcal{LC}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}))$ に一致する．上の lemmas より mapping ξ は自然に $*$-homomorphism $C_{M_n}(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}/\mathcal{LC}$, $\phi \mapsto [T_\phi]$ を引きおこす．次の Proposition を使って目的の定理を得る．

Proposition 2.3. $\phi \in L^\infty_{M_n}(\mathbb{T})$ とする．このとき，

$$T_\phi \in \mathcal{LC}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})) \iff \phi \equiv 0 .$$

Theorem 2.4. $\mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T}))$ から $C_{M_n}(\mathbb{T})$ 上への $*$-homomorphism ρ で次を満すものが存在する.

(i) cross-section ξ をもつ,

(ii) $(0) \to \mathcal{LC}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})) \xrightarrow{i} \mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T})) \xrightarrow{\rho} C_{M_n}(\mathbb{T}) \to (0)$

は exact sequence.

定理からすぐわかることは, すべての $T \in \mathcal{T}$ は $T_\phi + K$, $\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T})$, $K \in \mathcal{LC}$ の形に書けること.

Corollary 2.5. $\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T})$ とする. このとき,

$$T_\phi \in \mathcal{F}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T})) \iff \det\phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}.$$

次に T_ϕ の analytic index が ϕ とどのように関係するかを見よう. Fredholm operator T に対して $\mathbb{T}$ から $GL(n,\mathbb{C})$ への continuous map $f(T)$ が対応する. そして T の analytic index は $f(T)$ の homotopy class にのみ関係する. ところで $[\mathbb{T}, GL(n,\mathbb{C})] \cong \mathbb{Z}$ であり, この isomorphism は $\phi \mapsto ind_t(\phi)$ によってあたえられる. ただし $ind_t(\phi)$ は $\det\phi$ の原点に関する winding number である. また analytic index は $[\mathbb{T}, GL(n,\mathbb{C})]$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism $\phi \mapsto ind_a(T_\phi)$ を定義する. いま $\psi(e^{it}) = (a_{kl}(t))$, $a_{11}(t) = e^{it}$, $a_{kl}(t) = \delta_{kl}$ $(k \geq 2, l \geq 1)$ に対して $ind_a(T_\psi) = -1$, $ind_t(\psi) = 1$ となる. 以上から,

Theorem 2.6. $\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T})$, $\det\phi \neq 0$ on $\mathbb{T}$ とする.

このとき，$T_\phi \in \mathcal{F}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}))$，$\mathrm{ind}_a(T_\phi) = -\mathrm{ind}_t(\phi)$.

$n=1$のとき，$\ker T_\phi = (0)$ または $\ker T_\phi^* = (0)$ であることが知られている．よって，$n=1$ の場合に invertibility に関する条件を得ることが出来る．

Corollary 2.7. $\phi \in C(\mathbb{T})$ とする．このとき，

$$T_\phi : \text{invertible in } \mathcal{J}(H^2(\mathbb{T})) \Longleftrightarrow \phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T},\ \mathrm{ind}_t(\phi) = 0.$$

$n \geq 2$ のとき，即ち matrix の場合にはこの命題はなりたたない．しかし，$\{\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T}) ; T_\phi \text{ invertible}\}$ は $\{\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T}) ; \det\phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}, \mathrm{ind}_t(\phi) = 0\}$ で dense open となることが知られている．

§3. この節では $H^2(\mathbb{R})$ 上の symbol を almost periodic functions にもつ Wiener-Hopf operator と，$L^p(\mathbb{R}^+)$ 上に作用する，symbol を measure の Fourier-Stieltjes 変換にもつ Wiener-Hopf operator について述べる．

$AP(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の almost periodic functions からなる algebra とし，$\mathcal{J}(AP)$ を $\{W_\phi : \phi \in AP(\mathbb{R})\}$ で生成された C^*-algebra，$\mathcal{C}(AP)$ をその commutator ideal とする．このとき $AP(\mathbb{R})$ に symbol をもつ Wiener-Hopf operator に関して Theorem 2.4 と

同様な次の結果がある．

Theorem 3.1. $\mathcal{T}(AP)$ から $AP(\mathbb{R})$ 上への $*$-homomorphism η で次を満すものがある；

(i) cross-section ξ をもつ，

(ii) $(0) \to \mathcal{C}(AP) \xrightarrow{i} \mathcal{T}(AP) \xrightarrow{\eta} AP(\mathbb{R}) \to (0)$

は exact sequence．

この定理と Bohr [1] による次の結果を使って W_ϕ の invertibility に関する条件を得ることが出来る．

Proposition 3.2. ϕ を $AP(\mathbb{R})$ における invertible function とする．このとき，$\exists_1 \alpha \in \mathbb{R}\ \exists \psi \in AP(\mathbb{R})$; $\phi(t) = e^{i\alpha t} \exp \psi(t)$ さらに，$ind_t(\phi) \equiv \alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \{\arg \phi(T) - \arg \phi(-T)\}$．

Theorem 3.3. $\phi \in AP(\mathbb{R})$ とする．このとき，

W_ϕ : invertible in $\mathcal{T}(AP)$ $\Leftrightarrow$ ϕ : invertible in AP, $ind_t(\phi) = 0$.

ところで $\mathcal{C}(AP) \cap \mathcal{LC}(H^2(\mathbb{R})) = (0)$ であるので上の exact sequence より Fredholm 性に関する条件を導びくことは出来ない．更に topological index $ind_t(\phi)$ は real number となるので analytic index との間に明らかな関係はない．このことは Fredholm operator の概念を適当なものにしなければならない

ことを意味する．Breuer [2], [3] は Fredholm operator のうまい概念を von Neumann algebra の線に従って導入し，index theory を展開している．

上の議論は Wiener-Hopf operator $\hat{W}_k f(x) = \lambda f(x) + \int_0^\infty k(x-t) f(t)\,dt$ において $k(t)dt$ を discrete measure に取った場合に相当する．

我々は以下 $k(t)dt$ として一般の finite regular Borel measure を取った場合を述べる．$M(\mathbb{R})$ で $\mathbb{R}$ 上の finite regular Borel measures 全体を記す．$M(\mathbb{R})$ は convolution を積として単位元をもつ可換な Banach algebra となる．ここでは $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の kernel を $M(\mathbb{R})$ にもつ Wiener-Hopf operator を調べる．即ち $\mu \in M(\mathbb{R})$ に対して，$L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の Wiener-Hopf operator を次で定義する．

$$\hat{W}_\mu f(x) = \int_0^\infty f(t)\, d\mu(x-t) \qquad (f \in L^p(\mathbb{R}^+))$$

我々は $\hat{W}_\mu$ に対して Fredholm 性や invertibility に関する条件を得，index theory を述べる．しかし algebra $M(\mathbb{R})$ の複雑な構造のため $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上では十分な結果は得られない．即ち $\hat{W}_\mu$ が invertible operator であっても μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible とはならない measure μ が存在する．もし μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible であることを仮定すれば一応満足のいく index theory が成立する．$L^1(\mathbb{R}^+)$ 上の operator としての $\hat{W}_\mu$ に関してはすべてがうまくいく．まずこのことから述べる．それには次の Banach algebra

$M(\mathbb{R})$ の maximal ideal space の first Čech cohomology group に関する J. L. Taylor [8] の結果が本質的である.

Proposition 3.4. μ を $M(\mathbb{R})$ において invertible とする. このとき, $\exists_1 n \in \mathbb{Z}\ \exists_1 c \in \mathbb{R}\ \exists \nu \in M(\mathbb{R})$; $\mu = \rho^n * \delta_c * e^{\nu}$.
但し $d\rho(x) = -d\delta_0(x) + 2\chi_{[0,\infty)} e^{-x}\,dx$ でその Fourier 変換は $\hat{\rho}(t) = (1+it)/(1-it)$. ここで $\mathrm{ind}_t(\mu) = (n, c)$ とおく.

$L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の operator $\hat{W}_\mu$ が Fredholm とは range $\hat{W}_\mu$ が closed で $\dim\ker \hat{W}_\mu$, $\dim\operatorname{coker} \hat{W}_\mu < \infty$ なること. さらに analytic index $\mathrm{ind}_a(\hat{W}_\mu)$ とは $\dim\ker \hat{W}_\mu - \dim\operatorname{coker} \hat{W}_\mu$ のこととする. このとき,まず $L^1(\mathbb{R}^+)$ 上の Wiener-Hopf operator $\hat{W}_\mu$ に関して次の定理がいえる.

Theorem 3.5. $\mu \in M(\mathbb{R})$ とする. このとき $\hat{W}_\mu$ が Fredholm である必十条件は μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible かつある integer n に対して $\mathrm{ind}_t(\mu) = (n, 0)$ となること. このとき, $\mathrm{ind}_a(\hat{W}_\mu) = -n$.

一般に $1 \leq p < \infty$ の時, μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible を仮定すれば次のような結果となる.

Theorem 3.6. p を $1 \leq p < \infty$ とする. $\mu \in M(\mathbb{R})$, invertible とする. このとき $\hat{W}_\mu$ が $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上の Fredholm operator である必十条件はある integer n に対して $\mathrm{ind}_t(\mu) = (n, 0)$ となること

である．このとき，$\mathrm{ind}_a(\hat{W}_\mu) = -n$．

最後に $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上の operator として $\hat{W}_\mu$ は invertible であるが $M(\mathbb{R})$ では invertible でない measure μ の存在を示して本稿を終る．$M(\mathbb{R})$ において次のような measure ν が存在する．

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{\nu}(t)| < \|\nu\|_{sp} .$$

更に $\mathrm{supp}(\nu)$ は compact と出来る．そこで λ を ν の spectrum から $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\hat{\nu}(t)| < \lambda$ となるようにえらぶ．このとき，$\mu = \lambda\delta_0 - \nu$ とおけば μ は non-invertible かつ $\hat{W}_\mu$ は $L^2(\mathbb{R}^+)$ で invertible となる．何故なら Laplace 変換によって $\hat{\mu}$, $\frac{1}{\hat{\mu}}$ は上半平面に正則有界に拡張出来るからである．

参考文献

[1] H. Bohr, Über fastperiodische ebene Bewegungen, Comment. Math. Helv. 4 (1934) 51-64.

[2] M. Breuer, Fredholm theories in von Neumann algebras I, Math. Ann. 178 (1968) 243-254.

[3] ——————, ———————— II, Math. Ann. 180 (1969) 313-325.

[4] A. Devinatz, On Wiener-Hopf operators, Functional Analysis (Proc. Conf. Irvine, Calif., 1966) 81-118.

[5] R. G. Douglas, Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators,

CBMS Regional Conference, University of Georgia, Athens, Ga., 1972.
[6] R.G. Douglas and J.L. Taylor, Wiener–Hopf operators with measure kernel, Proc Conf. on Operator Theory. Hungary, 1970.
[7] M. Rosenblum, A concrete spectral theory for self-adjoint Toeplitz operators, Amer. J. Math. 87 (1965) 709–718.
[8] J. L. Taylor, The cohomology of the spectrum of a measure algebra, Acta Math. 126 (1971) 195–225.