

Bifurcation について

広大理 井上 淳

最近 Bifurcation 関係の出版物が急激に増加しているのですが、必ずしも当地では その理論の *raison d'être* が知られているとはいえないようなので、その解説を試みるものです。

さて、我々の出会う多くの非線型方程式は、多くの場合、いくつかの parameter を含んでいます。一般的に

$$(1) \quad u_t = F(\nu; t, u)$$

の形をしているものと考えられます。例えば、

Ex 1 (Navier-Stokes equation)

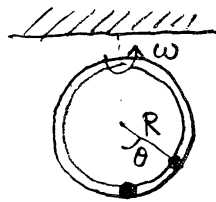
$$(2) \quad u_t - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{\partial \Omega} = g \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

この式の物理的意味は、適当な教科書にゆだねることにして、

$R = \frac{1}{\nu}$ は Reynolds 数と呼ばれる parameter.

Ex.2 (Calabi の例)



左図のように天井からフラワーポをつるし、中にパチンコ玉を入れ角速度 ω で回わします。 g を重力として、Newton の

法則に従ってパチンコ玉の動きを表わすと

$$(3) \quad \ddot{\theta} = \sin \theta \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \quad \theta = \theta(t), \quad \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \theta.$$

ここでは ω を parameter とみます。

他にいくつもの例はありますが、差し当りこれだけにしましょう。尚、parameter がいくつが入っている場合もあり、それも又面白い問題を提示してくれます。 ([2])

以後簡単の爲、 $F(\nu; t, u) = F(\nu; u)$ となつておくとしましょう。

今、 (ν_0, u_0) が $F(\nu_0, u_0) = 0$ をみたしているとき、 u_0 を (1) の 平衡解 (stationary solution) といいます。さて、

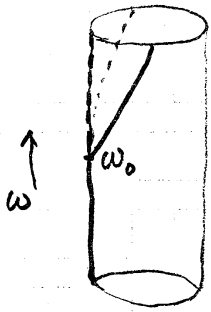
この平衡解 u_0 を少しゆつちてみましょう。すなわち、

$u(t) = u_0 + v(t)$, として (1) 式に代入します。

$$(4) \quad v_t = F(\nu_0; u_0 + v(t)), \quad v(0) = \text{given}$$

このとき、 $v(0)$ が小さければ、 $v(t)$ も小さく、かつその影響が時間と共に小さくなることが望ましいわけですが、これを 安定 (stable) ということにします。

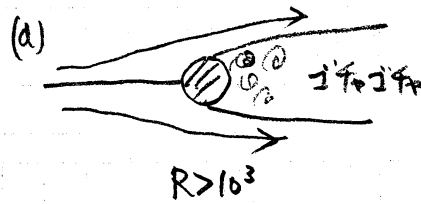
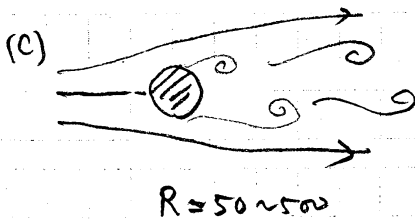
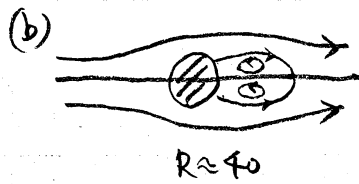
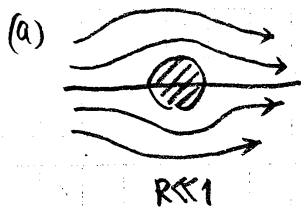
例2の場合で ω を大きくしていくと下図のようになります。



$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$. (2) の stationary sol. は $\theta = 0$ と $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$ です。 $\omega < \omega_0$ のときはパチンコ玉はフック-フックの下端にして $\omega \geq \omega_0$ となると、一般に段々上にあがってきます。すなわち、 $\omega = \omega_0$ だけ

stationary sol. は2つあって、一つは安定、もう片方は不安定になります。このように parameter がある点 (臨界点) を越えると解のあり方が変わるとき、Bifurcation が起こるといいます。

Ex3 (円柱のまわりの一様流) 一様な水の流れの中に円柱を固定して R を変化させるとしましょう。(実際には、流れを遅くする)。今# [7] によれば、大体以下ようになります。



上のようにして乱流が現われるのですが、これに対し、Hopf と Landau は、「乱流は安定性と枝合れがくり返して生ずる」と予想しました。すなわち (a) では一様流は安定な平衡解、それが R が大きくなると (b) となって違う安定な平衡解、又 R が大きくなると (c) となって、今度は時間的に周期的な安定な解ができ、それをくり返し、今度は周期が ω のもの、 3ω のものとなって (d) に到る。

最近、ある stationary sol. が bifurcation point を過ぎると periodic sol. となるという現象、(Hopf Bifurcation) が説明され (Ruelle-Takens [5], Marsden-McCraken [4]), 又 periodic sol. から quasi-periodic sol. がでてくる様子が少しずつ分かってきたようです。筆者は不勉強にして「具体的」問題についてどこ迄わかっているのか定かではありませんが、極く最近でた Joseph [3] の力作には色々説明してあるようです。

Ex. 4. (Yamabe の内題) 有名な山田の問題とは、 M を n 次元 Riemann manifold とし、 (η, φ) $\eta \in \mathbb{R}$ $\varphi > 0$ on M と

$$(5) \quad 4 \frac{n-1}{n-2} \Delta \varphi + R \varphi = \eta \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \quad \text{on } M$$

なるものをみつけることにあります。 R は given. 上の η みて、 $\varphi = 0$ がいつ bifurcate するかと考えることができます。これが、この Bifurcation theory をこの symposium で紹介して

みたかった一つの動機です。

まだいくらでも考えることはあるようですが、今回はこれで終わらせていただきます。

文献

- [1] T. Aubin : Equations différentielles non linéaires et
Problème de Yamabe concernant la courbure scalaire
- [2] C.N. Chow, J.K. Hale & J. Mallet-Paret : Applications of
Generic Bifurcation I. II. Arch. Rat. Mech. Anal. 59 (75)
159-188.
- [3] D.D. Joseph : Stability of fluid motions I. Springer (76)
- [4] J.E. Marsden & M. McCracken : The Hopf Bifurcation and its
applications. Springer, Appl. Math. Sci. #19 (76)
- [5] D. Ruelle & F. Takens : On the nature of turbulence
Comm. Math. Phys. 20 (71) 167-192
- [6] D.H. Sattinger : Topics in stability and bifurcation theory
Springer Lec. notes 309 (73)
- [7] 今井功 : 流体力学 (前編) 裳華房.