数理解析研究所講究録
291巻 1977年 13-30

葉層構造とGelfand-Fuchs構造

名大 理　土屋昭博

§0 Introduction.

葉層構造の特性類はBottによるPontryagin類の消滅定理をはじめ, Secondary類の定義等がBott, Haefliger. Godbillon-Vey, Losik等によって研究され, それ等はGelfand-FuchsによるFormal vector fieldsのなすLie環のcohomology群とも深い関係がつけられている。ここでは葉層構造とGelfand-Fuchs Cohomologyとの関係をCohomology levelからcochain levelでのfunctorにもちあげて考える。そのためにFoliationを定義する微分式を次々微分する。その時そこに表われる構造方程式がFormal vector fieldsのなすLie環のCanonical cochain complexの定義式にほかならない事をみる。この事とDifferential graded algebrasのhomotopy categoryの

algebraic topology を利用して求める functor とその間の関係が調べられる。その結果たとえば codimension q の framed foliations の分類空間 $F\Gamma_q$ についてその homotopy 群 $\pi_i(F\Gamma_q)$ が無限に多くの i について、$\pi_i(F\Gamma_q)$ から有限次元(over R) vector 空間への non-zero な onto 準同型写像が構成される。

§1. Framed foliations.

Def. 1-1. q を正なる整数とする

1) M を smooth manifold とする. M 上の codimension q の framed foliation ω とは.

i) $\omega=(\omega^1,\cdots,\omega^q)$: R^q-valued 1-form on M.

ii) $\omega=(\omega^1,\cdots,\omega^q)$ は各点で一次独立

iii) integrability condition. M 上の $gl(q,R)$ valued 1-form (ω^i_j) が存在して構造方程式

$$d\omega^i=-\sum_j \omega^i_j\wedge\omega^j$$ をみたす。

2) $f:M\longrightarrow N$, smooth map とし ω : N 上の codim. q framed foliation とする。f が ω に transversal, $f\perp\omega$, とは $f^*\omega$ が M 上各点で一次独立のとき。この時 $f^*\omega$ は M 上の codim. q の

framed foliationを定義する。

3). (M, ω_0), (M, ω_1)をM上の2つのcodim. qのframed foliationsとする。ω_0とω_1とがconcordantであるとは、ω_0とω_1、$M \times I$上にcodim. q framed foliations $\hat{\omega}$が存在して次の2つを示すとき。(イ) $\hat{\omega}$は$M \times 0$, $M \times 1$とtransversal
(ロ) $\hat{\omega}|_{M \times 0} = \omega_0$, $\hat{\omega}|_{M \times 1} = \omega_1$.

この時concordantはequivalence relationsとなる。そこでsmooth manifold Mについて$FP_q(M)$で、M上のcodim. q framed foliationsのconcordance classes全体のなるsetを表わす。

Prop. 1-2. Gromov - Phillips [3].
M : open manifold (i.e. Mの各connected componentはcompactでない。), $f: M \to N$をsmooth map, ωをN上のframed foliationとする。この時$f': M \to N$ smooth mapで$f \simeq f'$ homotopic かつ $f' \perp \omega$なるものが存在する。

記号: $\mathfrak{F}\mathcal{M}$でfinite simplicial complexと同じhomotopy typeをもつopen manifoldsとその間のsmooth mapsのhomotopy classes

のなすcategory。$\mathfrak{M}_1 \mathcal{M}$ で connected, simply connected なもののなす$\mathfrak{M}$のfull subcategoryとする。
今 $\mathrm{ob}\,\mathfrak{M} \ni M$ について Sets, $F\Gamma_q(M)$ を Def. 1-1) の通りとし、
$f : M \to N$, smooth map と $F\Gamma_q(N)$ の元 $\{\omega\}$ が与えられたとする。$\{\omega\}$の代表元 ω を一つとり、Prop 1-2 により f' を選び、$\{f'^*\omega\} \in F\Gamma_q(M)$ を考える。Prop 1-2 の relative version の拡張を考える事により $f'^*\omega$ の属する concordant class $\{f'^*\omega\} \in F\Gamma_q(M)$ は f' の取り方によらず well defined な事がわかる。これを $f^*\{\omega\} \in F\Gamma_q(M)$ と表わす。更に Prop 1-2 の relative version をもう一度使うと これは f の homotopy classes にしかよらない事がわかる。こうして次の命題を得る

Prop. 1-3. Haefliger [3].

$F\Gamma_q : \mathfrak{M} \to (\mathrm{Sets})$ なる contravariant functor が定義される。

さて foliation に関する構造方程式 $d\omega^i = -\sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j$ を高次の構造方程式にまで拡張しよう、そのために少し準備をする。

$q \geq 1$ integer を fix する。

$G_n(q) = \{f : (R^q, 0) \to (R^q, 0)$ diffeo の n-jets 全体のなす Lie 群$\}$. たとえば $G_1(q) = GL_q(R)$。 $n \geq 1$.

$\mathfrak{a}(q) = \{R^q$ 上の formal vector fields 全体のなす Lie 環$\}$.

$\mathfrak{a}_n(q) = \{X \in \mathfrak{a}(q) \quad X = \sum a^i_\alpha x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}, a^i_\alpha \in R$ と infinite sum に展開したとき $a^i_\alpha = 0$, $|\alpha| \geq n+1$ とおいてできた $\mathfrak{a}_n(q)$ の quotient Lie algebra$\}$.
たとえば $\mathfrak{a}_0(q) \cong R^q$, abelian. ⋯ $n = 0, 1, 2, \cdots$

今 M smooth manifold, $\mathcal{F}$ を必ずしも framed でない, M 上の codim q foliation とする。$\tau(M)$, M の tangent bundle, $\tau(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の tangent bundle = $\mathcal{F}$ を define する distribution。とする時 $\nu(\mathcal{F}) = \tau(M)/\tau(\mathcal{F})$ とおいて $\mathcal{F}$ の normal bundle が define される。$P_1(\mathcal{F}) = P_1$ で $\nu(\mathcal{F})$ の frame bundle とする。P_1 は $\mathcal{F}$ の normal 方向に関する 1-jets の frame bundle と考えられる。normal 方向に関する高次 jets の frame bundles $P_n(\mathcal{F})$ が考えられる。$n = 1, 2, \cdots$。又各 $P_n(\mathcal{F})$ 上には canonical forms が考えられる。これを合せて

Prop 1-4. M上の codim q foliation $\mathcal{F}$に対して. M上の principal bundles の列.

$\to P_n(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi_{n-1}} P_{n-1}(\mathcal{F}) \to \cdots \to P_1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi_0} M.$

で次の性質をもつものが存在する。

0) π_{n-1} は structure 群 $G_n(q)$ をもつ。

1) 各 P_n 上 $\mathfrak{a}_{n-1}(q)$ valued 1-form θ_{n-1} が存在して,
(イ) $\pi_{n-1}^*\theta_{n-2} = \pi_{n-2}\circ\theta_{n-1}$, ロ) $\pi_{n-1}^* d\theta_{n-1} = -\frac{1}{2}$ $\pi_{n-2}\circ[\theta_{n-1}, \theta_{n-1}]$, ここに $\pi_{n-1} : \mathfrak{a}_n(q) \to \mathfrak{a}_{n-1}(q)$ も同様に π_{n-1} で表わした。 $n=2, 3, \cdots$.

2) 上の (P_*, θ_*) は foliations に対する transversal map について natural 。

ところで今 (M, ω) を M上の codim q の framed foliation とする。この時 $\nu(\omega)$, ωの normal bundle, の frame $X=(X_1, \cdots, X_q)$ が $\omega^i(X_j)=\delta^i_j$ をみたすように unique に決る。だから この X は $P_1(\omega) \to M$ の cross-section $\hat{X}_1 : M \to P_1(\omega)$ を unique に決る。bundle $\pi : P_n(\omega) \to P_1(\omega)$ の fiber は affine space だから $\hat{X}_1$ は up to homotopy で unique に cross-section $\hat{X}_n : M \to P_n(\omega)$ に extend できる。そこで $\hat{X}_\infty : M \to P_\infty(\omega) = \varprojlim P_n(\omega)$ なる $\hat{X}_1$ の extension を1つ fix する。

この時 M上の $\mathfrak{a}(q)$-valued 1-form $\theta(\omega)$ を
$\theta(\omega) = \hat{\theta}(\omega) \circ \hat{X}_\omega$ で define する

Prop 1-5.

M上の codim q-~~fol~~ framed foliation ω に対して $\mathfrak{a}(q)$-valued 1-form on M, $\theta(\omega)$ が定まって次の構造方程式をみたす。

$$d\theta(\omega) = -\frac{1}{2}[\theta(\omega), \theta(\omega)]$$

かつこの $\theta(\omega)$ が次の意味で unique である。
$\theta'(\omega)$ をもう一つの $\theta(\omega)$ とすると、$M \times I$ 上の $\mathfrak{a}(q)$ valued 1-form $\hat{\theta}$ が存在して $d\hat{\theta} = -\frac{1}{2}[\hat{\theta}, \hat{\theta}]$ かつ $\hat{\theta}|_{M\times 0} = \theta(\omega)$, $\hat{\theta}|_{M\times 1} = \theta'(\omega)$ が成立する。

§2. Gelfand-Fuchs cohomology.

Formal vector fields の Lie 環 $\mathfrak{a}(q)$ に Krull topology を入れておく。各 $p \geq 0$ について $C^p(\mathfrak{a}(q))$ で、$\varphi: \mathfrak{a} \times \cdots \times \mathfrak{a} \longrightarrow R$, anti-commutative, p-multilinear continuous map 全体のなる vector space とする, ただし R には discrete topology を入れておく。differential $d: C^p(\mathfrak{a}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathfrak{a})$ を $d\varphi(X_0, X_1, \cdots X_p) = \sum_{i<j} \frac{1}{p+1}(-1)^{i+j} \cdot \varphi([X_i, X_j], X_0, \cdots \check{X}_i \cdots \check{X}_j, \cdots X_p)$ で define する。

又積 $\wedge : C^p(\mathfrak{a})\otimes C^{p'}(\mathfrak{a}) \longrightarrow C^{p+p'}(\mathfrak{a})$ を

$$(\varphi\wedge\varphi')(X_1,\cdots,X_{p+p'}) = \sum_{\sigma\in S_{p+p'}} \frac{1}{(p+p')!}\,\varphi(X_{\sigma(1)},\cdots X_{\sigma(p)})\cdot\varphi'(X_{\sigma(p+1)},\cdots X_{\sigma(p+p')})$$

で define する。この時、$d\circ d=0$, $\varphi'\wedge\varphi = (-1)^{\deg\varphi\cdot\deg\varphi'}\varphi\wedge\varphi'$, 及び $d(\varphi\wedge\varphi') = d\varphi\wedge\varphi' + (-1)^{\deg\varphi}\varphi\wedge d\varphi'$ が成立する。$H^*(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}))$で Differential graded algebra $C^*(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}))$ の cohomology ring を表わす。

ところで $\mathfrak{a}(\mathfrak{g}) = \{X=\sum a^i_\alpha x^\alpha \partial/\partial x^i$, infinite sum, $a^i_\alpha\in R\}$ と表わされる。そこで $\theta:\mathfrak{a}(\mathfrak{g})\to\mathfrak{a}(\mathfrak{g})$ linear map を $\theta = id$, 恒等写像で表わし $\theta=\sum\theta^i_\alpha x^\alpha \partial/\partial x^i$ infinite sum, $\theta^i_\alpha\in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}),R)$, と base で展開する。この時 $\theta^i_\alpha\in C^1(\mathfrak{a}(\mathfrak{g})) =$ Continuous $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}),R)$ となり $\{\theta^i_\alpha\}$ は $C^1(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}))$ の R上の base となる。だから $C^*(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}))$ = free commutative algebra generated by $\{\theta^i_\alpha\}$ となる。又定義から $\varphi\in C^1(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}))$ について $d\varphi(X,Y) = -\frac{1}{2}\varphi([X,Y])$.
この事から $d: C^*(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}))\to C^*(\mathfrak{a}(\mathfrak{g}))$ は $d\theta^i_\alpha$ を決めれば決る。ところで $\mathfrak{a}(\mathfrak{g})$ 上の二つの $\mathfrak{a}(\mathfrak{g})$ valued 2-forms $d\theta(X,Y) = \sum d\theta^i_\alpha(X,Y)\, x^\alpha \partial/\partial x^i$, 及び $-\frac{1}{2}[\theta,\theta](X,Y) = -\frac{1}{2}[\theta(X),\theta(Y)]$ を考えると上の事から $d\theta = -\frac{1}{2}[\theta,\theta]$ が成立する。

又また $d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta]$ 両各 components は unique に $d\theta^i_\alpha$ を決る。

そこで今 (M, ω) を M 上の codim. q. framed foliation とする. Prop. 1-5 の $\mathfrak{a}(q)$-valued 1-form $\theta(\omega)$ を取り $\theta(\omega) = \sum \theta^i_\alpha(\omega) x^\alpha \partial/\partial x^i$ と展開し, $\varphi(\omega): C^1(\mathfrak{a}(q)) \longrightarrow \Omega^1(M)$ linear map を $\varphi(\omega)(\theta^i_\alpha) = \theta^i_\alpha(\omega)$ で define し それを algebra homomorphism $\varphi(\omega): C^*(\mathfrak{a}(q)) \to \Omega^*(M)$ に unique に拡張する。上の考察と Prop 1-5 より次の Prop. を得る。

Prop 2-1.

各 codim q framed foliation (M, ω) に対し Differential graded algebra map $\varphi(\omega): C^*(\mathfrak{a}(q)) \longrightarrow \Omega^*(M)$ が対応する。又 $\varphi(\omega)$ は次の意味で unique up to homotopy. $\varphi'(\omega)$ を別の $\varphi(\omega)$ とすると, $\tilde{\varphi}: C^*(\mathfrak{a}(q)) \longrightarrow \Omega^*(M \times I)$ なる differential graded algebra map が存在し $\tilde{\varphi}|_{M\times 0} = \varphi(\omega)$, $\tilde{\varphi}|_{M\times 1} = \varphi'(\omega)$ をみたす。

cohomology 環 $H^*(\mathfrak{a}(q))$ の計算は Gelfand-Fuchs によってなされている。今 $W(\mathfrak{a}(q))$ で次の differential graded algebra を表わす。

$W(\mathfrak{a}(q)) = \hat{R}[c_1, \cdots, c_q] \otimes \Lambda^*(h_1, h_2, \cdots h_q)$ ここに $\deg c_i = 2i$, $\deg h_i = 2i-1$. $\hat{R}[c_1, \cdots, c_q] = R[c_1, \cdots, c_q]$ mod (ideal of degree $> 2q$). Λ^*: exterior algebra. かつ $dh_i = c_i$.

Proposition 2-2. Gelfand-Fuks [1].
$W(\mathfrak{a}(q)) \longrightarrow C^*(\mathfrak{a}(q))$. Differential graded algebra map で cohomology の同型 を induce するものが存在する。

$H^*(W(\mathfrak{a}(q)))$ を実際計算するのはむづかしくない。たとえば
Prop 2-3. Vey [2]
Elements $\{h_{i_1} \cdots h_{i_r} c_{j_1} \cdots c_{j_s}\}$.

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq q \qquad r = 1, \cdots q$$
$$1 \leq j_1 \leq \cdots \leq j_s \leq q \qquad s = 1, \cdots q$$
$$j_1 + \cdots + j_s \leq n < i_1 + j_1 + \cdots + j_s \text{ かつ } i_1 < j_1$$

が $H^*(\mathfrak{a}(q))$ の R 上の base となす。

§3 Homotopy category of D. G. A.

Differential graded algebra A とは, $(A = \sum_{q \geq 0} A_q, d)$ ~~differen~~ cochain complex over R で, anti-commutative な積をもち with unit かつ differential d は $d(u \cdot v) = d(u) \cdot v + (-1)^{\deg u} u \cdot d(v)$ をみたすものとする。

Differential graded algebra を D.G.A. と云い, D.G.A. の間の differential graded algebra map を単に D.G.A. map と云う

今後考える D.G.A. は次の仮定を常にみたしているものとする。

仮定。D.G.A A は connected, simply connected かつ cohomologically locally finite。すなわち
$H^0(A)=H^1(A)=0$, $H^i(A)$ は各 i について有限次元。

Def 3-1. A, B を2つの D.G.A とする。

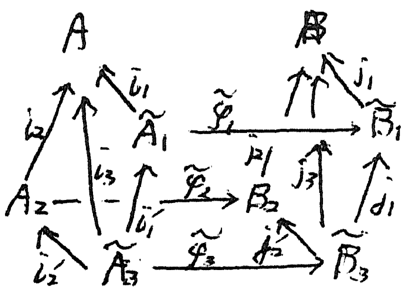
1) quasi morphism $\varphi: A \to B$ とは diagram

$$\begin{tikzcd} A & B \\ A' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\varphi"'] & B' \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

の事である。

ここに A', B': D.G.A, i, j, $\hat{\varphi}$: D.G.A map かつ $i^*: H^*(A') \to H^*(A)$, $j^*: H^*(B') \to H^*(B)$ は isomorphism.

2) $\varphi_1, \varphi_2 : A \rightrightarrows B$ を2つの quasi-morphisms とする。この時 φ_1 と φ_2: homotopic $\varphi_1 \sim \varphi_2$ とは次の時である。$\varphi_3: A \to B$ なる quasi-morphism が存在し, 又 D.G.A map $i_1': \tilde{A}_3 \to \tilde{A}_1$, $i_2': \tilde{A}_3 \to \tilde{A}_2$, $j_1': \tilde{B}_3 \to \tilde{B}_1$, $j_2': \tilde{B}_3 \to \tilde{B}_2$ が存在し次の commutative diagram をみたす時.



Prop 3-2.

1) Quasi morphisms の間の relation ~ は equivalence relation である

2) H.C.: で ob が D.G.A. 全体 (仮定をみたす。) morphism としては Quasi morphisms の homotopy classes 全体とすると morphisms の間に composition が定義できて category をなす。

H.C. を the homotopy category of D.G.A.'s という。又 de Rham cochain complex を得る functor Ω^* は homotopy category 可.M. $\to$ H.C. の間の functor とも考えられる。この時 de Rham theorem は次のように読める。$M \in$ 可.M. について $H^*(M;R) \cong H^*(\Omega^*(M))$. ただし 左辺は singular cohomology 右辺は H.C. 上で cohomology をとる functor。

Def 3-3.

D.G.A. が minimal とは M: algebra として

free (anti) commutative, かつ $\forall x \in \mathcal{M}$ について,
dx : decomposable i.e $dx \in \overline{M} \cdot \overline{M}$, ここに $\overline{M} = \sum_{q \geq 1} M_q$.

Prop 3-4 D. Sullivan [6].

D.G.A. "A" について minimal model $\mathcal{M}(A)$ と D.G.A, map $\varphi : \mathcal{M}(A) \longrightarrow A$ で cohomology の同型を induce するものがある。又このような $\mathcal{M}(A)$ は同型を除いて unique に決る。

今 $n \geq 2$ について $\mathcal{H}_1 C$ における n次元 sphere S^n を $S^n = H^*(S^n; R)$ with trivial differential で define する。又 $A \in ob\, \mathcal{H}_1 C$ について $\pi_0(A) = \pi_1(A) = 0$ $\pi_n(A) = Hom_{\mathcal{H}_1(C)}(A, S^n)$, $n \geq 2$, とおいて homotopy 群 $\pi_*(A) = \sum_n \pi_n(A)$ を define しよう。この時 $\pi_*(A)$ に自然に R 上の vector space の構造が入る。$\pi_*(A)$ に Whitehead 積を導入しよう。$p, q \geq 2$ とし $\varphi_1 \in \pi_p(A)$, $\varphi_2 \in \pi_q(A)$ を fix しよう。space level での Whihead 積 $[i_p, i_q]$: ~~$S^p \vee S^q \longrightarrow S^{p+q-1}$~~ $S^{p+q-1} \longrightarrow S^p \vee S^q$ を考えよう。$S^p \vee S^q$, S^{p+q-1} と同じ homotopy type をもつ $\mathcal{H}_1 C$ の元を X, Y とし, $[i_p, i_q] : Y \to X$ なる smooth map を fix する。この時 $[\varphi_1, \varphi_2] \in \pi_{p+q-1}(A)$ を $A \xrightarrow{\varphi_1 \vee \varphi_2} S_1^p \vee S^2 \simeq \Omega^*(Y) \xrightarrow{[i_p, i_q]^*} \Omega^*(X) \simeq S^{p+q-1}$. の represent する morphism in $\mathcal{H}_1 C$ とする。

この時ものごとがすべて up to homotopy, 及び homotopy functor である事によりすべて well defined である。今 graded module $s^{-1}\pi_*(A)$ を $(s^{-1}\pi_*(A))_q = \pi_{q+1}(A)$ で define しよう。

Prop 3-5.

1) A topological space 又は $A \in ob\,\mathcal{H}_1\mathbb{C}$ について graded module $s^{-1}\pi_*(A)$ は次の意味での graded Lie algebra over $\mathbb{Z}$ (or over R) となる.

- $[x, y] = (-1)^{pq}[y, x]$ $\deg x = p,\ \deg y = q$
- $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{\deg x \deg y}[y, [x, z]]$.

2) Functor $\Omega^*: \mathcal{T}_1\mathcal{M} \to \mathcal{H}_1\mathcal{C}$ は homotopy 群の間の Lie 環としての準同型 $s^{-1}\pi_*(M) \longrightarrow s^{-1}\pi_*(\Omega^*(M))$ を与える。

3) この時 $s^{-1}\pi_*(M)\otimes R \longrightarrow s^{-1}\pi_*(\Omega^*(M))$ は同型である。

次に $A \in ob\,\mathcal{H}_1\mathcal{C}$ について $\pi_*(A)$ がどのように計算されるかを調べよう。$A \in ob\,\mathcal{H}_1\mathcal{C}$ についてその minimal model $\varphi: M(A) \to A$ を fix する.

Prop 3-6.

1) $\pi_*(A) \cong \mathrm{Hom}_R(\bar{M}/\bar{M}^2, R)$

2) Bracket $[\,,\,]: \pi_*(A)\otimes\pi_*(A) \longrightarrow \pi_*(A)$ は $-d: \bar{M}/\bar{M}^2 \longrightarrow \Lambda^2(\bar{M}/\bar{M}^2)$ の dual となる。

さて $C^*(\alpha(q)) \in ob\,\mathcal{H}_1\mathcal{C}$ の homotopy type を考えてみよう。Prop 2-1, Prop 2-2 により $H^*(\alpha(q))$ の積は trivial である事がわかる。この ことにより

Prop 3-7.

今 $X = S^{2q+1} \vee \cdots$, を cohomology $H^*(X:R)$ が $H^*(\alpha(q))$ と同型となる spheres の one-point union となる $ob\,\mathcal{H}_1\mathcal{C}$ の元とすると $X \simeq C^*(\alpha(q))$ は the same homotopy type.

そこで spheres の one point union に関する Hilton の結果を利用すると $C^*(\alpha(q))$ の minimal model 及び homotopy 群が求められる。

V_q : free graded Lie algebra generated by $s^{-1}H_*(\alpha(q))$ とする。ここに $H_*(\alpha(q)) = \sum_{p\geq 1} \mathrm{Hom}_R(H^p(\alpha(q)), R)$. $\mathcal{M}(q)$ で $\mathrm{Hom}_R(sV_q, R)$ で generate される free anti commutative algebra とし、
$-d : \Lambda^1(\mathrm{Hom}_R(sV_q, R)) \longrightarrow \Lambda^2(\mathrm{Hom}_R(sV_q, R))$ の dual で define し,あとは derivation として differential d を定義して できた D.G.A とする

Prop 3-8 Hilton [5].

1) $s^{-1}\pi_*(C^*(\alpha(q))) \cong V_q$, as Lie algebras

2) $C^*(\alpha(q))$ の minimal model は上の (q) である。

§4. Gelfand-Fuchs 構造

Def 4-1. $q \geq 1$ integer について

・$GF_q : \mathcal{H}, C \longrightarrow$ (Sets) なる contravariant functor を $GF_q(A) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H},C}(C^*(\alpha(q)), A)$ で定義する。

・$GF_q(A)$ の元を A の上の Gelfand-Fuchs 構造とよぼう。$M \in ob$ 多様体について $GF_q(M) = GF_q(\Omega^*(M))$ とおく。

・$\pi_*(GF_q) = \sum_{n \geq 0} \pi_n(GF_q) \equiv \sum_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{H},C}(C^*(\alpha(q)), S^n)$

とおく。

Prop 2-1 により

Prop 4-2.

$GF_q, F\Gamma_q$: 多,$\mathcal{M} \rightrightarrows$ (Sets) なる二つの contravariant functors の間の natural transformation $\Phi : F\Gamma_q \to GF_q$ が存在する。それは $F\Gamma_q(M) \ni \{\omega\}$ について $GF_q(M) \ni \{\varphi(\omega)\}$

$\varphi(\omega) : C^*(\alpha(q)) \longrightarrow \Omega^*(M)$ を対応させる事により得られる。

この命題により $\pi_*(F\Gamma_q) \to \pi_*(GF_q)$ の image を調べる事を考えよう。次の事が知られている。

1) $\pi_i(F\Gamma_q) = 0 \quad 0 \leq i \leq q+1$. Thurston [7].

2) $\pi_3(F\Gamma_1) \to R \to 0$ なる homomorphism が存在する。Thurston [ ]

3) 各 $k \geq 1$ integers について integer $b_k > 0$ と onto homomorphism $H_{4k-1}(FP_{2k-1}, Z) \to R^{b_k} \to 0$ が存在する。 J.L. Heitsch [4].

ところで Heitsch の結果をよくみてみると、1) の FP_q に関する connectivity theory と Serre の C-theory を利用すると次の Prop を得る。

Prop 4-3. Heitsch.

$$\pi_{4k-1}(FP_{2k-1}) \longrightarrow H_{4k-1}(FP_{2k-1}) \longrightarrow R^{b_k} \longrightarrow 0$$ は onto homomorphism である。

ところで上の map $\pi_{4k-1}(FP_{2k-1}) \longrightarrow R^{b_k}$ は

$$\pi_{4k-1}(FP_{2k-1}) \longrightarrow \pi_{2k-1}(GF_{2k-1}) \longrightarrow H_{2k-1}(GF_{2k-1}) \longrightarrow R^{b_k}$$

と factor される。 Prop. 3-8 を使うと 次の命題を得る。

Prop. 4-4.

上の map は onto な Lie 環の homomorphism

$$S^+\pi_*(FP_{2k-1}) \longrightarrow V((R^{b_k})_{2q-2}) \longrightarrow 0$$ 。ここに、

V は free Lie algebra functor, $(R^{b_k})_{2q-2}$ は grading を $2q-2$ とした graded vector space R^{b_k}。

References.

[1] Gelfand-Fuchs. The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields. Izvestia Ann. Vol. 34. (1970) p 322 - 337

[2] G. Godbillon. Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels. Seminaire Bourbaki (1972-1973) No 421.

[3] A. Haefliger. Homotopy and Integrability. Manifolds Amsterdam 1970. Lecture Note in Math Vol 197 Springer p 133~163

[4] J. L. Heitsch. Residue and characteristic classes of foliations. preprint.

[5] P. J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. J. London Math Soc. Vol. 30 (1955) p 154-171

[6] D. Sullivan, Differential forms and the topology of manifolds. Manifolds-Tokyo 1973. p 37~56

[7] W. Thurston. Foliations and groups of Diffeomorphisms. Bull. Am. Math Soc. Vol 86 (1974) p 304~307