数理解析研究所講究録
295巻 1977年 69-76

包合系の特性多様体を持つための条件
及び特異な場合のFrobeniusの定理について

東大・理　真島 秀行

ここに著者の得た二つの結果を記す。二つの事柄は無関係ではないが、独立な話題として扱う。

I. 包合系の特性多様体を持つための条件

偏微分方程式の解法を常微分方程式の解法に帰着するという考えは昔からある。しかし全てがそのようになるとは思われない。それではその限界はどこにあるのだろうか。すなわち次の問題を考える：

問題. 偏微分方程式の初期値問題を常微分方程式の問題に帰着出来る限界はどこか。

この問題は病理的かもしれないが明確に解答し得るならば無意味ではないであろう。l, m, nを方程式の階数、未知函数の個数、独立変数の個数としておく。

上記の問を考えるとき、まず偏微分方程式としてどのようなものを対象とするのか決めなくてはいけない。解を持つ偏

微分方程式系は Cartan-Kuranishi-Matsudaの延長定理により或る正則条件の下で包合系に延長される。従って、対象を包合系としてよいだろう。包合系Φとは、正則条件、解析的条件、及び代数的条件で規定される。そしてΦにはn個の指数と云われる整数 $s_1(\Phi)\geqq s_2(\Phi)\geqq\cdots\geqq s_n(\Phi)\geqq 0$ が導入されている。$l=1$, $m=1$の場合にはLagrange bracketについて閉じている系と同じであり、$l=1$, $s_1(\Phi)=0$ の場合には完全積分可能な一次外微分方程式系と同一視出来る。

さて、次に「常微分方程式の問題に帰着する」と云うことをどう把握するのか。$l=1$, $m=1$, のときには Lagrange, Cauchy Jacobi, Lie らによって上記の問は肯定的に解かれている、すなわち、$\Phi=\{F_1\cdots F_r\}$ に対して $(n-r)$ 次元の初期多様体が与えられたならば、次々に

$$\frac{dx_1}{F_{i,p_1}}=\cdots=\frac{dx_n}{F_{i,p_n}}=\frac{dy}{F_{i,y}+\sum_j p_j F_{i,x_j}}=\frac{-dp_1}{F_{x_1}}=\cdots=\frac{-dp_n}{F_{x_n}}\quad(i=1,\cdots r)$$

なる系を解いて解多様体を構成出来る。しかしながら、この解法の本質を指摘したのは E. Cartan である。彼は一般に外微分方程式系Σに対して特性系、特性多様体を定義し、特性系が完全積分可能であることを示した。また特性多様体を持つための十分条件を与えた；$\tilde{s}_1(\Sigma)=1$。一階偏微分方程式系Φを外微分方程式系$\Sigma(\Phi)=\{d\Phi,\ \text{contact form}\}$ とみたてて解

くと云うLieの立場をとるとき、古来の特性系はE. Cartanの特性系に一致し、彼の十分条件が特性多様体を持つことを保証している（$\hat{S}_i(I(\Phi))=S_i(\Phi)$ であることが示されて初めてそう云えるのだが）。また、一方，$m=1, n=2$に対しては、Darbouxの方法というのがあった。それは与えられた方程式系，初期値に応じて新しい方程式系を構成し、特性多様体を持つ系に帰着するという方法であった。この解法が包合系を新しい包合系に拡張する理論とE. Cartan の特性系の理論とからなっていることを指摘したのは垣江氏である。彼はさらに、l, m, n が一般の場合に次の問題を考えている：

1. 与えられた包合系Φに対し、その解がまたΦのそれになる新しい包合系を構成すること
2. E. Cartan の特性多様体の理論が適用され得る包合系を見い出すこと 。

こういう次第で、我々は「常微分方程式に帰着する」ということをこの二つの問題としてとらえることにする。この問題のうち 1. を垣江氏は専ら扱っていて、2. は原理的にCartanによって解かれているので、それでよしとされた。(cf. Kakié [2])

ところが著者は例を計算するうちに十分広い特性多様体を持つための条件を見い出した。しかもそれは指数だけの条件としては最良であるもわかった。結果は次の通りである。

定理. Φを包合系とする. $\sum_1^n s_i(\Phi)<n$ならば, 特性系の余次元は少なくとも $(n-\sum_1^n s_i(\Phi))$ である。従って特性系が特異でないところでは, これを解いて少なくとも $(n-\sum_1^n s_i(\Phi))$ 次元の特性多様体が得られる。

定理. $t_1, \cdots t_n$を整数で, $m \geqq t_1 \geqq \cdots \geqq t_n \geqq 0$ かつ $\sum_1^n t_i \geqq n$を満たすものとする。このとき $s_i(\Phi)=t_i$となる一階包合系Φで特性系の余次元が0となるものがある。この状況はgenericである。

こうして冒頭の問題に対して一つの解答を与えることが出来る: $\sum_1^n s_i(\Phi)<n$ が限界である。

同階数の拡張をすると $\sum_1^n s_i(\Phi)$ は減る。従って何回かの拡張の後には $\sum_1^n s_i<n$ になる。

尚, $m=1$ のときには Beudon によって上の結果が得られていた。

II、特異な場合のFrobeniusの定理について

原点$0 \in \mathbb{C}^n$の近傍で定義された正則な一次外微分形式 $\omega=\sum_1^n A_i(x)dx_i$ を考える。完全積分可能条件 $d\omega \wedge \omega=0$を仮定する。このとき或るiに対して $A_i(0) \neq 0$ ならばωは積分を持つ。すなわち、二つの原点の近傍で正則な函数g, fがあって, $\omega=g\,df$ $(g(0) \neq 0)$ と書ける。

それでは全ての i に対して $A_i(0)=0$ の場合はどうであろうか。著者の得た結果は次の通りである。

定理. $\operatorname{rank} \left.\frac{\partial(A_1 \cdots A_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}\right|_0 = r \geqq 3$ ならば，ω は積分を持つ。$r=2$ で形式的に積分を持つならば本当に積分を持つ。

実は B. Malgrange によってより一般的な定理が証明されてしまっている。

定理. $I=\{x ; A_1(x)=\cdots=A_n(x)=0\}$ とする。$\operatorname{codim} I \geqq 3$ ならば ω は積分を持つ。$\operatorname{codim} I=2$ で形式的に積分を持つならば本当に持つ。

著者の証明は，変数変換してゆき一つ変数の数を下げて正則な場合の Frobenius の定理に帰着する，というやり方である。以下に概略を記そう。

まず次のことに注意する。

補題1. 上の仮定の下で ω の一次成分の行列は対称である。すなわち，$\omega=\sum_i(\sum_j a_{ij}x_j+[2次以上])dx_i$ と書くとき行列 (a_{ij}) は対称行列となる。

よって $\omega=\sum_1^r(x_i+[2次以上])dx_i+\sum_{r+1}^n[2次以上]dx_j$ と仮定してよい。

補題2. $\theta=\sum_i{}_1^N(y_i^m+[\text{higher order}])dy_i$，$d\theta\wedge\theta=0$ は形式的に積分を持つ。m は正の整数，$N\geqq 3$ とする。なお次のようにパラメーターが入っていてもよい。すなわち，

$\theta = \sum_1^n (y_i{}^m + B_i(y, z))\,dy_i$, $d_y\theta\wedge\theta = 0$ ならば、$\theta = \hat{g}(y, z)\, d_y \hat{f}(y, z)$。ここで d_y は変数 $y=(y_1 \cdots y_n)$ に関する外微分、$\hat{g}, \hat{f}$ は形式巾級数である。

補題3. $\theta = x_1^m dx_1 + x_2^m dx_2 + \sum_3^n B(x)\,dx_j$, $d\theta\wedge\theta = 0$ とするとき、Bは $(x_1^{m+1} + x_2^{m+1}, x_3 \cdots x_n)$ の函数となっている。

それでは、ωを変換していこう。まず

$$\begin{cases} \omega_1 = (\xi_1 + \Xi_1(\xi_1, \eta_1, x_3 \cdots x_n))\,d\xi_1 + (\eta_1 + H_1(\xi_1, \eta_1, x_3 \cdots x_n))\,d\eta_1 + \sum_3^n \Gamma_1^i(\xi_1, \eta_1, x_3 \cdots x_n)\,dx_i \\ \Xi_1(0, 0, x_3 \cdots x_n) = H_1(0, 0, x_3 \cdots x_n) = 0 \end{cases}$$

と出来る。続いて $d\omega_1\wedge\omega_1 = 0$ または形式的積分の存在に注意すると、

$$\begin{cases} \omega_2 = (\xi_2 + \Xi_2(\xi_2, \eta_2, x_3 \cdots x_n))\,d\xi_2 + (\eta_2 + H_2(\xi_2, \eta_2, x_3 \cdots x_n))\,d\eta_2 + \sum_3^n \Gamma_2^i(\xi_2, \eta_2, x_3 \cdots x_n)\,dx_i \\ (0, 0, x_3 \cdots x_n) \text{ において } \Xi_2, H_2, \frac{\partial \Xi_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \Xi_2}{\partial \eta_2}, \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}, \frac{\partial H_2}{\partial \eta_2} \text{ が } 0。 \end{cases}$$

に変換出来る。さらに $\xi_2 = \frac{\xi_3 + \eta_3}{\sqrt{2}}$, $\eta_2 = \frac{\xi_3 - \eta_3}{\sqrt{2}\, i}$ により

$$\begin{cases} \omega_3 = (\xi_3 + \Xi_3)\,d\eta_3 + (\eta_3 + H_3)\,d\xi_3 + \sum_3^n \Gamma_3^i\,dx_i \\ \Xi_3, H_3 \text{ については上と同じ性質を持つ。} \end{cases}$$

になる。次に原点で直交する二つの複素積分曲線の存在から

$$\begin{cases} \omega_4 = K_4\left(\xi_4\,d\eta_4 + \eta_4(1 + H_4)\,d\xi_4 + \sum_3^n \Gamma_4^i\,dx_i\right) \\ K_4(0) = 1 \end{cases}$$

と変換出来る。ここで $\xi_4\,d\eta_4 + \eta_4(1 + H_4)\,d\xi_4$ に注目すると、これはパラメーターを持つ Briot-Bouquet 型の方程式で、η_4 の係数が1である。また補題2（または仮定）より、形式的

積分を持つ。これから

$$\begin{cases} \omega_6 = K_5 (\xi_5 d\eta_5 + \eta_5 d\xi_5 + \sum_3^n \Gamma_5^i d\lambda_i) \\ K_5(0) = 1 \end{cases}$$

の形に変換し得ることがわかる。再び変数を取り換えて、

$$\begin{cases} \omega_6 = K_6 (\xi_6 d\xi_6 + \eta_6 d\eta_6 + \sum_3^n \Gamma_6^i d\lambda_i) \\ K_6(0) = 1 \end{cases}$$

とし、Γ_6^iを見れば補題3により$(\rho, \lambda_3 \cdots \lambda_n)$の函数であることがわかる。$\rho = \frac{1}{2}(\xi_6^2 + \eta_6^2)$とした。そこで、

$$\omega_6 / K_6 = d\rho + \sum_3^n \Gamma_6^i (\rho, \lambda_3 \cdots \lambda_n) d\lambda_i \equiv \theta$$

を考えると $d\omega_6 \wedge \omega_6 = 0$ よりθが$(\rho, \lambda_3 \cdots \lambda_n)$について完全積分可能である。よってFrobeniusの定理によりθは積分を持つ。変数を元に戻してωの積分の存在がわかる。

〈参考文献〉

Ⅰ、について

E. Cartan [1], Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, Ann. Sci. École Norm. Sup. 18, 1901.

[2] Leçon sur les invariants intégraux, Hermann Paris 1922.

M. Kuranishi, Lectures on involutive systems of partial differential equations, Publ. Soc. Mat. São Paulo. 1967

松田道彦、外微分形式の理論、岩波，東京，1976.

K. Kakié [1] On involutive systems of partial differential equations in two independent variables. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, sec. IA. 21. 1974. [2] 二次以上の characters が消える包合的偏微分方程式系について、数理研講究録 226.

J. Beudon, Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres, Ann. École Norm. 13. 1896, supplement

大島・小松 一階偏微分方程式、岩波講座, 基礎数学. 1977

真島 包合系の特性多様体を持つための条件、東大修士論文、1977.

II. について.

B. Malgrange [1] Frobenius avec singularités, codimension un, Publ. Sc. I.H.E.S. 46. 1976. [2] Frobenius avec singularités 2. Le cas général (à paraître)

R. Moussu, Sur l'existence d'intégrales premières pour germe de forme de Pfaff. Ann. Inst. Fourier. 26. 2. 1976.

M. Hukuhara - T. Kimura - T. Matsuda, Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, Pub. Math. Soc. Japan. 7. 1961

真島 原点で特異な解析的完全積分可能一次外微分方程式の積分の存在について、東大修士論文、1977.