数理解析研究所講究録
295巻 1977年 38-45

正則函数 $f(x)$ の不変量 $L(f)$ と，$f^{-1}(0)$ の特異点の性質について．

京大数理研研修員　矢野　環

§0. はじめに．

$f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$，　$\mathcal{O}$：正則函数の芽（の層），

$f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$，　$\mathfrak{a}=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{O}f_i$．

広中，Lê-Ramanujam，加藤（満生）等により，次の定理が得られている．

定理　f は $\mathfrak{a}$ 上 integral である。即ち，$\exists a_i(x,\xi)$：$\mathcal{O}$ 係数の $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ の多項式で homogeneous i 次であり，

$$f^l+a_1(x,df)f^{l-1}+a_2(x,df)f^{l-2}+\cdots+a_l(x,df)=0$$

ここで，（又以下でも df とはその係数 grad f と思う）。

定理により存在の保証される，f の $\mathfrak{a}$ 上の整従属次数を $l(f)$ と記す．

ところで，超曲面 $f^{-1}(0)$ の性質は，f^s のみたす偏微分方程式系と密接に関係している。即ち，$\mathcal{D}$ を正則函数係数の偏微分作用素の芽（層），$\mathcal{D}[s]=\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[s]$ として，

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}[s]f^s = \mathcal{D}[s]/\mathcal{J}(s),$$

$$\mathcal{J}(s) = \{\, P(s)\in\mathcal{D}[s] \mid P(s)f^s = 0 \,\}.$$

が重要である。さらに，次の加群を定義する。

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{D}[s]/(\mathcal{J}(s)+\mathcal{D}[s](\mathfrak{a}+\mathcal{O}f)).$$

ここで，$L(f)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{J}(s) \ni^{\exists} Q(s) = s^{l} + \sum_{\lambda\geq 1} s^{l-\lambda} Q_\lambda(x, D), \quad \mathrm{ord}\, Q_\lambda \leq \lambda$$

である様な最少の l を $L(f)$ と記す．$\sigma_k(P)$ により $P\in\mathcal{D}$ の k 階の表象をあらわすことにすれば，

$$Q(s)f^s = (s)_l\Big(f^{l} + \sum_{\lambda\geq 1} f^{l-\lambda}\sigma_\lambda(Q_\lambda)(x, df)\Big)f^{s-l} + (s \text{ につき } l-1 \text{ 次以下})$$

$$(s)_l = s(s-1)\cdots(s-l+1)$$

であることより，次の不等式が成立する。

$$l(f) \leq L(f)$$

$l(f)=1$ の場合は，$L(f)=1$ でもあるが，一般には等号は成立しない。特定の f についての $L(f)$ の評価等については，[Y1] を参照せよ。$f^{-1}(0)$ が原点を　孤立特異点とする場合は，$l(f)=1$ であれば，実は座標変換により weighted homogeneous polynomial になることが知られており（斎藤恭司），$f^{-1}(0)$ は比較的簡単な構造をもつ。よって，$l(f)\geq 2$ の場合が興味ある。

§1. $L(f)$ と $f^{-1}(0)$

以下 $f^{-1}(0)$ は $0\in\mathbb{C}^n$ を孤立特異点にもつとする。

$(f^{-1}(0), 0)$ の不変量として, local monodromy map M はよく知られている。$M=S+N$, S: semi-simple, N: nilpotent とするとき, $N^n=0$, n: 空間次元 が知られている。$N^e=0$ となる初めての e は $L(f)$ と密接に関係している。但し, $L(f)$ (又 $l(f)$) は, 次元 n を一定にとておいても, いくらでも大きくなる様な f がある。

例 $f = x^{n_1} + y^{n_2} + t\,x^{m_1}y^{n_2-1}$ $\quad t$: non-zero parameter.

$$\frac{n_1-1}{k+1} \leqslant m_1 \leqslant \frac{n_1-2}{k}, \quad \frac{1}{n_2} < \frac{m_1}{n_1}, \quad n_2 \geqslant k+3.$$

f は non-quasi-homogeneous であるが (n_1, n_2, m_1) の条件から, 第3項は前2項を weight $(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})$ でみたものより高次である。従って, local monodromy は $X^{n_1}+Y^{n_2}$ のそれと同じである。一方

$$l(f) \leqslant \left[\frac{k}{2}\right]+1, \qquad L(f) \leqslant k$$

が示される。($k=1,2,3,4$ までは, 上記の2式とも等号である。)

超曲面の不変量として, 重要なものに, b函数がある。それは, f が孤立特異点の場合は §0 で定義した $\widetilde{\mathcal{M}}$ における作用 $s: \overline{P(s)} \longmapsto s\overline{P(s)}$ ($\overline{}$ は $\mathcal{D}[s]$ の元の $\widetilde{\mathcal{M}}$ における class) の induce した $s: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{M}}, B_{pt}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{M}}, B_{pt})$

$B_{pt} = \mathcal{D}\,\delta(x)$ の最小多項式を $\tilde{b}(s)$ とするとき,

$$b(s) = (s+1)\tilde{b}(s)$$

と与えられる。$b(s)$ は local monodromy よりも強い不変量である。実際, f が $f = f_0 + g$, f_0 : weighted homogeneous isolated sing. g は f_0 の weight に関して高次のときは, M は不変であるが, $b(s)$ は変化する。今, $Hom_{\mathcal{D}}(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{B}_{pt})$ における, s の固有値 $\{-\alpha_1, \dots, -\alpha_\mu\}$ (ここで $\mu = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}$, $\alpha_i > 0$ であることがわかる. 又, α_i は重複もゆるして記している。) として,

$\tilde{P}(t) = \sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i}$ としたとき, 前頁の例についていえば次の様になる. $\tilde{P}_0(t)$ を $x^{n_1} + y^{n_2}$ のそれ, $\tilde{P}(t)$ を f のそれとすれば,

$$\tilde{P}_0(t) = \frac{(t^{1/n_1} - t)(t^{1/n_2} - t)}{(1 - t^{1/n_1})(1 - t^{1/n_2})}$$

$$\tilde{P}(t) = \tilde{P}_0(t) + (1-t)\, t^{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sum_{j=2}^{k} t^{j(\frac{m_1}{n_1} - \frac{1}{n_2})} \frac{1 - t^{1 - j\frac{m_1}{n_1}}}{1 - t^{\frac{1}{n_1}}}$$

である. ここで, $\tilde{P}(t)$ の二項に k があらわれていることに注意せよ. ($k=1$ の時は, Σ は空な和である。$k=2,3$ については上式は証明されており, $k \geq 4$ では予想である。)

$L(f) = 2$ の場合は, $\tilde{\mathcal{M}}$ の完全な構造, $b(s)$ の決定法等すべて [Y1][Y2] 等に求められている。よって, $L(f) = 3$ の場合が, 次の § であつかわれる。

§ $L(f)=3$.

我々は2つの場合を区別する.

$$l(f)=2,\quad L(f)=3.$$

$$l(f)=L(f)=3.$$

第一の場合, $^{\exists}P(s)=s^2+sA+B\in \mathcal{J}(s)$,

$$P(s)f^s=a(x)sf^{s-1}$$

$$a(x)\notin \mathfrak{a}+\mathcal{O}f$$

となっていることがわかる。我々はこの場合を $(2,3;a)$ と表記する。一般の場合にもどり,

$(b_i(x))$ を ideal $(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}f):f^2$ の basis とせよ.

$$^{\exists}B_j(s)=b_j s^2+b_j^{(1)}s+b_j^{(2)},\qquad \mathrm{ord}\ b_j^{(k)}\le k$$

$$B_j(s)f^s=b_j^{(3)}(x)sf^{s-1},$$

となる $B_j(s)$ が構成される。ここで $b_j^{(3)}\notin \mathfrak{a}+\mathcal{O}f$, $j=1,\dots,J$

$b_j^{(3)}=0$ $j=J+1,\dots,J+J'$ と仮定してよい。このとき,

$$b_j s f^{s+1}\equiv b_j^{(3)}f^s \mod \mathcal{D}(\mathfrak{a}+\mathcal{O}f)f^s$$

であることがわかる。さて,さらに $\mathfrak{a}+\mathcal{O}f : b_j^{(3)}=\sum_k \mathcal{O}b_{j,k}^{(4)}$,

$b_{j,k}=b_{j,k}^{(4)}\cdot b_j$ $(j\le J)$, $b_{j,k}=b_j$ $(j>J)$ とおく。我々は

$$B_{j,k}(s)=b_{j,k}s^2+b_{j,k}^{(1)}s+b_{j,k}^{(2)}\in \mathcal{J}(s)$$

を構成することができる。一般には,さらに,

$$C_l(s)=C_l(x,D)s^2+C_l^{(1)}(x,D)s+C_l^{(2)}(x,D),$$

$$\mathrm{ord}\ C_l\ge 1,\quad \mathrm{ord}(C_l)+2=\mathrm{ord}(C^{(2)})\ge \mathrm{ord}\ C_l^{(1)}+1$$

という形の $g(s)$ の元が，$g(s)$ の生成元として必要である。

(2, 3; a) の場合，$b_{1,k}$, $b^{(1)}_{1,k}$, $b^{(2)}_{1,k}$, $B^{e}_{1,k}$ の代りに，

b_k, $b^{(1)}_k$, $b^{(2)}_k$, B_k と記すことにしよう。

次の定理は，$L(f)=3$ の場合の $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の完全な構造を与えるよ

定理. $L(f)=3$ の時，$\widetilde{\mathfrak{M}}$ は下記の表示をもつ.

1) case (3, 3) i.e. $l(f)=L(f)=3$.

$$0 \leftarrow \widetilde{\mathfrak{M}} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}} \mathcal{D}^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_i & & \\ f & & \\ b^{(3)}_j & & \\ & f & \\ a'_\nu & a_\nu & \\ b^{(2)}_{j,k} & b^{(1)}_{j,k} & b_{j,k} \\ c^{(2)}_\ell & c^{(1)}_\ell & c_\ell \end{pmatrix}} \mathcal{D}^N$$

2) case (2, 3; a)

$$0 \leftarrow \widetilde{\mathfrak{M}} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}} \mathcal{D}^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_i & & \\ f & & \\ g & h & \\ a'_\nu & a_\nu & \\ b^{(2)}_k & b^{(1)}_k & b_k \end{pmatrix}} \mathcal{D}^{n+2+r+q}$$

ここで、 (g, h) は $(0, f)$ としても、$(a, 0)$ としてもよい。
さらに、

$$(\mathfrak{a}+\mathcal{O}f):a \supset \mathfrak{a}:f \supset \mathfrak{a}+\mathcal{O}f+\mathcal{O}a$$

が成立している。

a'_ν a_ν とは、 $\sum \mathcal{O}a_\nu(x) = \mathfrak{a}:f$ であり、

$$(a_\nu(x)s + a'_\nu(x, D))f^s = 0$$

となっているものである。

この構造定理より、特に $(2,3;a)$ の場合に、次の定理が導びかれる。

定理 $F = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathfrak{m}}, B_{pt})$ とする。F の μ 次元の basis を、次の様にとることができる。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\mu_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v'_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{\mu_2} \\ v_{\mu_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} u_{\mu_1} \\ v_{\mu_1} \\ w_{\mu_1} \end{pmatrix} \right\}.$$

ここで $(u_1, \cdots, u_{\mu_i})$ は F_i の basis であり、

$$F_1 = \{u \in B_{pt} \mid (\mathfrak{a}+\mathcal{O}f+\mathcal{O}a)u = 0\}$$

$$F_2 = \{u \in B_{pt} \mid (\mathfrak{a}:f)u = 0\}$$

$$F_3 = \{u \in B_{pt} \mid ((\mathfrak{a}+\mathcal{O}f):a)u = 0\}.$$

又、 (v, v', w) は次の方程式から決定される。

$$\begin{cases} b_k v_i' + b_k^{(1)} u_i = 0, \\ a_\nu v_i + a_\nu' u_i = 0, \\ b_k w_i + b_k^{(1)} v_i + b_k^{(2)} u_i = 0. \end{cases}$$

定理　$\exists P(s, x, D) \in \mathcal{D}[s]$ s.t.

$$P(s, x, D) f^{s+1} = b(s) f^s,$$

$P(s,x,D) = \sum s^k P_k(x,D)$ としたとき、$\max_k(\mathrm{ord}\, P_k + k) = \deg b(s)$.

上記第1の系は、$L(f)=1/2$ の場合の自然な拡張であるが、$a(x)$ が重要な役割をはたすことが著しい。第2のものは、$L(f)=1, 2$ の時と同じ性質をもつ $P(s)$ の存在を保証している。

証明にあたっては、先の定理の $(g,h)=(0,f)$, $(a,0)$ がつかいわけられる。

$(2,3;a)$ の実例と、その構造については [Y1] [Y2] に詳しい。

[Y1] T. Yano On the theory of b-functions. ; to appear in Publ. of RIMS.

[Y2] 〃 2 ; in prep.

[Y3] 〃 3 ; 〃 .