数理解析研究所講究録
295巻 1977年 30-37

p進L関数の積分表示

北大 理　森田康夫

1. 問題

Nを自然数とし，χを $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ より $\mathbb{C}^\times$ への準同型とする。この時 $(n, N) \neq 1$ なる整数 n に対して $\chi(n) = 0$ とおくことにより

$$\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

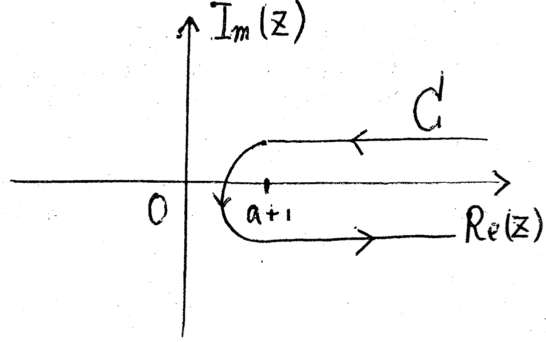
なる map ができる。このようなものを Dirichlet の character と呼ぶ。

さてこのような χ に対して

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_\chi (z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{(z+n)^2}$$

とおく。また $Re(s) > 1$, $-1 < a < +\infty$ に対し

$$L(s; a, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{(n+a)^s}$$



とおく。この時 C を右図のような曲線とするとき

$$(s-1)L(s;a,\chi) = \frac{-1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{d}{dz}\right)^2\left\{\log\Gamma_\chi(-z+a+1)\right\} z^{-s+1}\,dz$$

が成り立つ。ただし $|\arg(z)|\leq\pi$ とする。
以下この積分表示にあたるものの p 進体上での類似物をつくる。

2 結果

p を奇素数とし，$\mathbb{Q}_p$ を p 進体，$|\ |_p$ を p 進付値で $|p|_p = p^{-1}$ をみたすものとする。k を $|\ |_p$ を延長した付値で完備な代数的閉体とする。$|\ |_p$ でこの延長された付値もあらわす。

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{x\in\mathbb{Q}_p \;\middle|\; |x|_p = 1\right\}$$

とおく。これは $\mathbb{Q}_p^\times$ の subgroup であり

$$\mathbb{Z}_p^\times = (1\text{ の }p-1\text{ 乗根全体の作る群}) \times \left\{x\in\mathbb{Q}_p \;\middle|\; |x-1|_p \leq |p|_p\right\}$$

と直積に分解される。 $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して

$$\omega(x) = \lim_{n \to \infty} x^{p^n}$$

とおく。これは上の直積の第一成分への射影を与える。とくに ω は modulo p で定義された Dirichlet character を与える。

次に ω を

$$\left\{ z \in k \;\middle|\; {}^\exists x \in \mathbb{Z}_p^\times \ \text{s.t.}\ |z-x|_p < |p^{\frac{1}{p-1}}|_p \right\}$$

の上へ $\omega(z) = \omega(x)$ とおき拡張しておく。

また

$$z = \omega(z)\langle z \rangle$$

とおき $\langle\ \rangle$ を定義しておく。そこで $s_1 \in k$, $s_2 \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ に対し, $s = (s_1, s_2)$ とおき

$$z^s = \omega(z)^{s_2} \langle z \rangle^{s_1}$$

$$\langle z \rangle^{s_1} = \exp(s_1 \log \langle z \rangle)$$

とおく。これは $\omega(z) = \zeta$ とおく時 s_1 と $z - \zeta$ の関数として

$$|s_1|_p \, |z-\zeta|_p < |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

で収束する巾級数で与えられる.

χ は modulo f で定義された Dirichlet character であるとする。このとき

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(z+1) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{fp^\alpha} \sum_{\substack{1\leq n\leq fp^\alpha \\ (n,p)=1}} \frac{\chi(n)}{z+n}$$

とおく。また a を $|a|_p \leq |p|_p$ をみたす k の元とするとき

$$(s-1)\, L_p(s; a, \chi) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{fp^\alpha} \sum_{\substack{1\leq n\leq fp^\alpha \\ (n,p)=1}} \frac{\chi(n)}{\langle a+n\rangle^{s-1}}$$

とおく。この時

◎ $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(z+1)$ は $\mathbb{P}^1(k) \setminus \mathbb{Z}_p^\times$ 上で収束し, この上の analytic function を与える. とくに

$$\left\{ z \in \mathbb{P}^1(k) \;\middle|\; |z-\zeta|_p > |p|_p \quad \text{for } \forall \zeta \text{ s.t. } \zeta^{p-1}=1 \right\}$$

上では.

$$\sum_{\zeta^{p-1}=1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(\zeta)} (z-\zeta)^n \right\}$$

の形で与えられる。

なることがわかっている. したがって

$$|s_1|_p < |p^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

の時

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1) \right\} z^{-s+1}$$

は　各1の $p-1$ 乗根 ζ につき

$$|p|_p < |z-\zeta|_p < |s_1^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p,\ |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

なる円環上で　$z-\zeta$ の Laurent 級数に展開される。そこで その $(z-\zeta)^{-1}$ の係数として

$$\operatorname*{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} [\qquad]$$

を定義する。この時

__定理__

$$(s_1-1) L_p(s_1, a, \chi\omega^{1-s_2})$$

$$= -\sum_{\zeta^{p-1}=1} \operatorname*{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} \left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1) \right\} z^{-s+1} \right]$$

が成り立つ。とくに左辺は $|s_1|_p < |p^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p$ において収束する s_1-1 の巾級数であたえられる。

3 準備

(イ) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\zeta)^n \qquad (a_n \in k)$$

が $|z-\zeta|_p = r$ の時収束するとする。この時

$$\operatorname*{Max}_{-\infty<n<+\infty} (|a_n|_p r^n) = \operatorname*{Max}_{|z-\zeta|=r} |f(z)|_p$$

が成り立つ。とくに $f_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(m)} (z-\zeta)^m$ が $\{|z-\zeta|_p = r\}$ 上で一様収束すれば、$a_n^{(m)}$ も $m \longrightarrow \infty$ の時収束する。

(ロ) $f(z)$ を (イ) の通りとし、$|\zeta-\zeta'|_p < r$ なる点 ζ' を取り

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-\zeta')^n \qquad (b_n \in k)$$

とおく。この時

$$a_{-1} = b_{-1}$$

が成り立つ。

4. 証明

r を $|k|_p$ の元で

$$|p|_p < r < |s_1^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p,\ |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

なる数を取る。この時 3の(イ)より

$$-\sum_{\zeta^{p-1}=1} \operatorname*{Res}_{|z-\zeta|_p \leqq |p|_p} \left[\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1) \right\} z^{-s+1} \right]$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{fp^\alpha} \sum_{\substack{1\leqq n \leqq fp^\alpha \\ (n,p)=1}} \chi(n) \sum_{\zeta^{p-1}=1} \operatorname*{Res}_{|z-\zeta|_p \leqq |p|_p} \left[\frac{-1}{-z+a+n} z^{-s+1} \right]$$

が成り立つ。ところで $|a|_p \leqq |p|_p$ だから 3の(ロ)より

$$\operatorname*{Res}_{|z-\zeta|_p \leqq |p|_p} \left[\frac{-1}{-z+a+n} z^{-s+1} \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } \omega(n) \neq \zeta \\ (a+n)^{-s+1} & \text{if } \omega(n) = \zeta \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$(a+n)^{-s+1} = \omega(n)^{-s_2+1} \langle a+n \rangle^{-s_1+1}$$

だから

定理の右辺

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{fp^\alpha} \sum_{\substack{1\leqq n \leqq fp^\alpha \\ (n,p)=1}} \chi\omega^{-s_2+1}(n) \frac{1}{\langle a+n \rangle^{s_1-1}}$$

$$= (s_1 - 1) L_p(s_1; a, \chi\omega^{1-s_2})$$

となる。

5 応用

$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1)$ の $z=0$ および $z=\infty$ での展開が定理を使って計算できる。結果を書くと

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1)$$

$$= \sum_{m \geqq 2} (m-1) L_p(m; a, \chi\omega^{1-m}) z^{m-2}$$

$$= -\sum_{m \leqq 1} (m-1) L_p(m; a, \chi\omega^{1-m}) z^{m-2}$$

となる。