数理解析研究所講究録
295巻 1977年 20-29

Vector bundle の integrable connection と Chern classes

千葉大 理　大槻 真

複素多様体上の正則ベクトル束 E に、高々1位の対数的極をもつ積分可能な有理型接続が与えられた時、その留数と E の Chern class との間の関係を調べる。

§1. 記号と道具

M は m-dim. complex manifold, Z は M の codim. 1 の anal. set で次の性質をもつものとする：

(H.1) Z の特異点は高々 normal crossing のみ,

(H.2) Z の各既約成分は滑らかである。

このとき、Z に高々1位の対数的極をもつ mero. 1-forms の層 $\Omega^1_M\langle Z\rangle$ が定義される（Deligne [3]）。

E を M 上の rank q の正則ベクトル束とし、E に mero. connection ∇ with simple log. poles along Z が与えられたとする。即ち $\Gamma(E)$ を E の hol. section の層として

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1_M\langle Z\rangle \otimes_{\mathcal{O}_M} \Gamma(E)$$

なる $\mathbb{C}$-linear map で,

$$\nabla(fs) = df.s + f\nabla(s) \qquad f \in \mathcal{O}_M,\ s \in \Gamma(E)$$

をみたすものである. 以下 connection ∇ は積分可能, 即ち

$$\nabla^2 = \nabla\circ\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^2_M\langle Z\rangle \otimes \Gamma(E)$$

は zero map であると仮定する.

Z_j, $j=1,2,\cdots,N$, を Z の既約成分とし, $P=\{1,\cdots,p\}$ に対し, $Z_P = \bigcap_{j=1}^{p} Z_j$ とおく. Z_P は M の codim. p の submfd.. $x \in Z_P$ の nbd. U に於て, local coordinate $z_1,\cdots,z_m$ を $U\cap Z_j = \{z_j=0\}$, $1\le j\le p$. となるようにとる. 更に U 上の E の hol. frame field $s = {}^t(s_1,\cdots,s_q)$ に関する ∇ の接続行列を Ω とおく:

$$\nabla(s) = \Omega s.$$

Ω は U に於て

(1.1) $$\Omega = \sum_{j\in P} A_j \frac{dz_j}{z_j} + B_P$$

と表わされる. ここで A_j は hol. func. の $(q.q)$-行列, B_P は, 高々 Z_k $(k\notin P)$ にのみ pole をもつ mero. 1-form の $(q.q)$-行列である. このとき以下の性質は容易にわかる:

(1.1.1) $$\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega := A_j|_{Z_j}$$

は Ω の表示 (1.1) に依らずに frame s のみに依り, $\Gamma(Z_j, \mathcal{O}(\mathrm{End}\,E|_{Z_j}))$ の元を与える …. ∇ の Z_j に沿う留数.

(1.2) $$[\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \mathrm{Res}_{Z_k}\Omega] = 0 \quad \text{on } Z_{jk} = Z_j \cap Z_k.$$

(1.3) $\beta_P := B_P|_{Z_P}$

とおくと, β_P は Z_P 上で, 高々 Z_k $(k \notin P)$ にのみ pole をもつ mero. 1-form の (q,q)-行列であり, ∇の積分可能性から次のことが分かる: for $j \in P$.

(1.3.1) $\nabla^{(\beta_P)} \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega := d\,\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega - \beta_P . \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega + \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega . \beta_P = 0$

(1.3.2) $d\beta_P - \beta_P \wedge \beta_P = 0.$

β_P は $E|_{Z_P}$ の connection ではない (Z_j の defining fun. のとり方に依る) が, この β_P から $E|_{Z_P}$ の connection が次のようにして構成できる:

divisor Z_j の定める line bdle. を $[Z_j]$, $[Z_j]$ の C^∞ metrical connection を ∇_j とする. U 上での $[Z_j]$ の frame z_j に関して

(1.4) $\nabla_j(z_j) = \Gamma_j . z_j$

とする (Γ_j は U 上の C^∞ (1,0)-form). そこで

(1.5) $\widetilde{\beta}_P := \beta_P - \sum_{j \in P} \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega . \Gamma_j|_{Z_P}$

とおくと, $\widetilde{\beta}_P$ は Z_j の defining fun. のとり方に依らずに決まり, $E|_{Z_P}$ の connection を与えることは, 容易な計算で確かめられる.

$\widetilde{\beta}_P$ は次の性質をもつ:

(1.5.1) $\nabla^{(\widetilde{\beta}_P)} \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega = 0 \qquad j \in P$

(1.5.2) $d\widetilde{\beta}_P - \widetilde{\beta}_P \wedge \widetilde{\beta}_P = -\sum_{j \in P} \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega . \partial\Gamma_j|_{Z_P}.$

ここで，Γ_j は $[Z_j]$ の metrical connection であったから，$d\Gamma_j = \bar{\partial}\Gamma_j$ であり，$\bar{\partial}\Gamma_j|_{Z_P}$ は $[Z_j]|_{Z_P}$ の curvature form に他ならない．

§2. Chern class の計算

$\Phi(A_1, \cdots, A_k)$ を，$A_j \in gl(q, \mathbb{C})$ を変数とする invariant symmetric multilinear form とする．
E の C^∞-metrical connection Γ，その curvature $R = d\Gamma - \Gamma\wedge\Gamma = \bar{\partial}\Gamma$ に対して

$$\frac{1}{(2\pi i)^k}\Phi(R, \cdots, R)$$

は，type (k,k) の Dolbeault cohomology group $H^{k,k}(M)$ の元を定める．これを $\Phi(E)$ とかく．又，M の codim. k の submanifold W の定める $H^{k,k}(M)$ の元を $C_k(W)$ とかく．（特に $k=1$ ならば $C_1(W) = -c_1([W])$ ）．

$J = \{j_1, \cdots, j_k\} \in [1, N]^k$ に対して，$j_1, \cdots, j_k$ のうち相異なるものを $j_1^*, \cdots, j_p^*$ とし，j_λ^* が J 内に現われる個数を δ_λ とする．

$Z_J = \cap_{j\in J} Z_j = \cap_{\lambda=1}^{p} Z_{j_\lambda^*}$ は M の codim. p の submfd. であり，その連結成分を $Z_J^{(\nu)}$ とすると，§1，(1.5.1) より，$\Phi(\mathrm{Res}_{Z_{j_1}}\Omega, \cdots, \mathrm{Res}_{Z_{j_k}}\Omega)$ は各 $Z_J^{(\nu)}$ 上で constant である．この値を

$\phi(\mathrm{Res}_{Z_{j_1}}\Omega, \cdots, \mathrm{Res}_{Z_{j_k}}\Omega)^{(\nu)}$ と記す．次の定理が成立つ：

Thm. 1 M, Z, E, ∇ は §1 の通りとする．k-変数の inv. sym. form ϕ に対して，

$$\phi(E) =$$

$$\sum_{J\in[1,N]^k}\left\{\sum_{\nu} \phi(\mathrm{Res}_{Z_{j_1}}\Omega, \cdots, \mathrm{Res}_{Z_{j_k}}\Omega)^{(\nu)} c_p(Z_J^{(\nu)})\right\}\prod_{\lambda=1}^{p} c_1(Z_{j_\lambda^*})^{\delta_\lambda - 1}$$

が $H^{k,k}(M)$ 内で成立する．

（証明） $k=2$ で示す．一般の場合も同じである．

$$L = \Omega - \Gamma$$

とおくと，L は type $(1,0)$ で（Γ は metrical connection!）

(2.1) $\quad \bar\partial L = -\bar\partial \Gamma = -R \quad$ on $M - Z$

(2.2) $\quad \mathrm{Res}_{Z_j} L = \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega$.

$\phi(R) = \phi(R, R)$ は M 上の $\bar\partial$-closed $(2,2)$-form であるが，これを $\Gamma_c(M, \mathcal{E}^{m-2,m-2})$（$M$ 上の compact support をもつ C^∞ $(m-2,m-2)$-forms の全体）上の current とみなして計算する．

$\varphi \in \Gamma_c(M, \mathcal{E}^{m-2,m-2})$ をとる．

$$\circledast \quad \phi(R)[\varphi] = \int_M \phi(R,R)\wedge\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{M_\varepsilon}\phi(R,R)\wedge\varphi$$

ここで，M_ε は Z の適当な ε-tubular nbd. Z_ε の complement：$M_\varepsilon = M - Z_\varepsilon$.

$$⊛ = \lim \int_{M_\varepsilon} \phi(-\bar\partial L, R) \wedge \varphi$$

$$= -\lim \int_{M_\varepsilon} \bar\partial \phi(L, R) \wedge \varphi \qquad (\because \bar\partial R = 0)$$

$$= -\lim \int_{M_\varepsilon} \bar\partial \{\phi(L,R)\wedge\varphi\} + \lim \int_{M_\varepsilon} \phi(L,R)\wedge \bar\partial\varphi$$

ここで，$\psi \in \Gamma_c(M, \mathcal{E}^{m-2,m-1})$ に対して，

$$T[\psi] = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{M_\varepsilon} \phi(L,R)\wedge\psi$$

とおくと，これは Cauchy の主値積分であり T は well-defined な current である．従って

$$⊛ = -\lim \int_{M_\varepsilon} \bar\partial \{\phi(L,R)\wedge\varphi\} + \bar\partial T[\varphi]$$

$$= -\lim \int_{M_\varepsilon} d\{\phi(L,R)\wedge\varphi\} + \bar\partial T[\varphi]$$

$$= -\lim \int_{\partial M_\varepsilon} \phi(L,R)\wedge\varphi + \bar\partial T[\varphi]$$

$$= \lim \int_{\partial Z_\varepsilon} \phi(L,R)\wedge\varphi + \bar\partial T[\varphi]$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \int_{Z_j} \mathrm{Res}\,\phi(L,R)\wedge\varphi + \bar\partial T[\varphi]$$

$$= 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \int_{Z_j} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, R)\wedge\varphi + \bar\partial T[\varphi].$$

更に，この式の第一項を変形する為に

$$L_j = \tilde\beta_j - \Gamma|_{Z_j}$$

とおく．$(\tilde\beta_j = \tilde\beta_{\{j\}})$.

L_j は次をみたす：

(2.3) $\bar\partial L_j = -\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega . \bar\partial \Gamma_j - R$ on $Z_j - \bigcup_{k\neq j} Z_k$

(2.4) $\mathrm{Res}_{Z_k} L_j = \mathrm{Res}_{Z_k}\Omega \big|_{Z_j}$ for $k \neq j$.

さて，前回と同様に $Z_{j,\varepsilon}$ を，$Z_j \cap (\bigcup_{k\neq j} Z_k)$ の Z_j 内での ε- tubular nbd. とすると，

$$\int_{Z_j} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, R)\wedge\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{Z_{j,\varepsilon}} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, R)\wedge\varphi$$

$$= -\lim \int_{Z_{j,\varepsilon}} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \bar\partial L_j)\wedge\varphi$$

$$- \lim \int_{Z_{j,\varepsilon}} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega . \bar\partial\Gamma_j)\wedge\varphi$$

$$= 2\pi i \sum_{k\neq j} \int_{Z_j\cap Z_k} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \mathrm{Res}_{Z_k}\Omega)\varphi$$

$$- \int_{Z_j} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \mathrm{Res}_{Z_j}\Omega)\bar\partial\Gamma_j\wedge\varphi + \{\bar\partial\text{exact term}\}$$

$$= 2\pi i \sum_{j\neq k}\sum_{\nu} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \mathrm{Res}_{Z_k}\Omega)^{(\nu)} \int_{(Z_j\cap Z_k)^\nu} \varphi$$

$$- \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega)\int_{Z_j} \bar\partial\Gamma_j\wedge\varphi + \{\bar\partial\text{-exact term}\}$$

$$= 2\pi i \sum_{j\neq k}\sum_{\nu} \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \mathrm{Res}_{Z_k}\Omega)^{(\nu)}\, C_2((Z_j\cap Z_k)^\nu)\,[\varphi]$$

$$+ 2\pi i\, \phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega)\, C_1(Z_j)^2\,[\varphi] + \{\bar\partial\text{-exact term}\}.$$

$$\left(\because\ c_1(Z_j) \sim -\frac{1}{2\pi i}\bar\partial\Gamma_j\right)$$

以上により $H^{2,2}(M)$ 内で

$$\Phi(E) =$$

$$\sum_{j\neq k}\sum_{\nu}\Phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\nabla, \mathrm{Res}_{Z_k}\nabla)^{(\nu)} c_2((Z_j\cap Z_k)^{\nu}) + \sum_j \Phi(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega)c_1(Z_j)^2$$

これは定理の $k=2$ の場合になっている//

Remark $\Phi(\mathrm{Res}_{Z_{j_1}}\nabla, \cdots, \mathrm{Res}_{Z_{j_k}}\nabla)$ の値は Z_J の成分ごとに異なる値をとる可能性はあるが、実はそのような例はみつかっていない。従って次の予想を立てる：

Conjecture $\Phi(\mathrm{Res}_{Z_{j_1}}\nabla, \cdots, \mathrm{Res}_{Z_{j_k}}\nabla)$ は Z_J ($J=\{j_1, \cdots, j_k\}$) の全ての成分の上で同一の値をとる。

この予想が正しければ、Thm. 1 はより簡明な次の形をとる。

Thm. 2 (Conj. を仮定して).

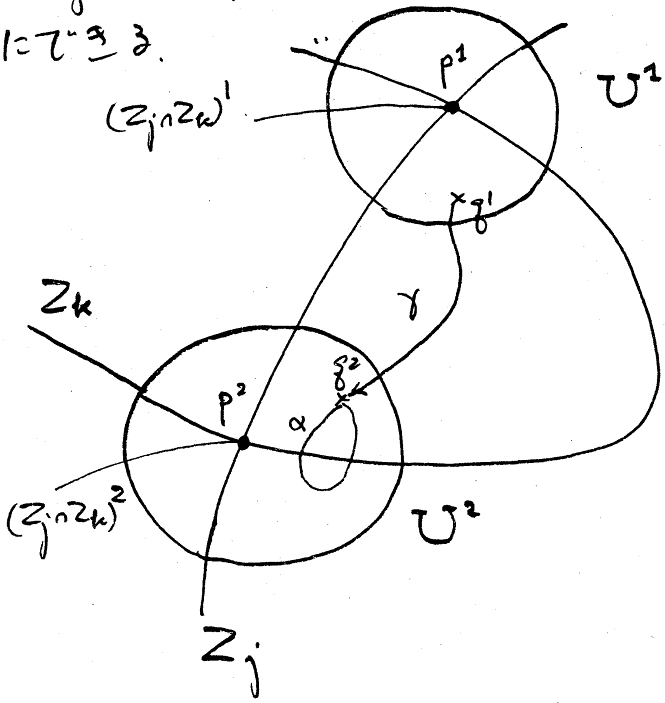
$$\Phi(E) = \sum_{1\le j_1, \cdots, j_k \le N}\Phi(\mathrm{Res}_{Z_{j_1}}\nabla, \cdots, \mathrm{Res}_{Z_{j_k}}\nabla)\prod_{\lambda=1}^{k} c_1(Z_{j_\lambda}).$$

§3. Conjecture に関して

上の Conj. は次の意味で"一般に"正しい。

Thm. 3 各 j について、$\mathrm{Res}_{Z_j}\nabla$ の任意の2つの固有値 α, β が、$\alpha-\beta \notin \mathbb{Z}-\{0\}$ をみたすならば、§2 の Conj. は成り立つ。

(証明の方針) $Z_j \cap Z_k$ の2つの成分 $(Z_j \cap Z_k)^i$ $i=1,2$, について, $C_2(\mathrm{Res}_{Z_j}\Omega, \mathrm{Res}_{Z_k}\Omega)^{(i)}$ が等しいことをみる. 一般の場合も同様にできる.



$(Z_j \cap Z_k)^i \ni p^i$ $i=1,2$ とし, p^i の nbd. U^i 内に点 $q^i \notin Z$ をとる. q^i を基点とする local fundamental groups $\pi_1(U^i - Z_j \cap Z_k, q^i)$ $(\cong \mathbb{Z}^2)$ は, 次の意味で共役である:

<u>Lemma</u> q^1 を始点, q^2 を終点とする $M-Z$ 内の適当な path γ をとり, $\alpha \in \pi_1(U^2 - Z_j \cap Z_k, q^2)$ に対して, $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ を考えると, これは $\pi_1(M-Z, q^1)$ の元として, $\pi_1(U^1 - Z_j \cap Z_k, q^1)$ の元と homotopic であり. かつこの対応によって $\pi_1(U^2 - Z_j \cap Z_k, q^2)$ の generators は $\pi_1(U^1 - Z_j \cap Z_k, q^1)$ のそれにうつる.

このLemmaの証明は略す.

ところで, ∇によって $M-Z$ 上に integrable な diff. equation が与えられており, その解による $\pi_1(U^i - Z_j \cap Z_k, q^i)$ の monodromy 表現が得られるが, 上の Lemma は

それらの monodromy 表現は同値であることを示している(γに沿って解を接続する). 一方 Thm. 3 の仮定は, monodromy 表現の logarithm としての residue が一意的に定まるということを表わしており, 従ってその invariant としての $c_2(\mathrm{Res}_{z_j}D, \mathrm{Res}_{z_k}D)^i$, $i=1,2$ は等しい //

References

1. Bott. Michigan Math. J. (1967)
2. Chern. Complex Mfds. without Potential Theory.
3. Deligne. Eq. Diff. à Points Sing. Rég.