数理解析研究所講究録
295巻 1977年 12-19

対称空間上の種々の特殊固有函数について

東大理　大島利雄
京大理　関口次郎

0. Introduction

Gを中心有限な連結実半単純 Lie 群とする. σをGの対合的自己同型とする. $H_0=\{g\in G;\ \sigma g=g\}$として, 閉部分群$H_0$と高々有限の誤差のある閉部分群$H$（すなわち $H\subseteq H_0$, $\#(H_0/H)<\infty$, あるいは $H\supseteq H_0$, $\#(H/H_0)<\infty$）に対して, 等質空間G/Hを対称空間と呼ぶことにする.

問題として, 対称空間 G/H 上の不変微分作用素の同時固有函数全体のなす空間に G を表現したとき, その表現がいつ既約になるか, どのような表現が得られるか. また G/H の Plancherel の公式を求め, その測度を計算することなどがある. それらと関連して, 特殊な固有函数の性質を調べることは興味深いし重要であろう. たとえば両側 H 不変な帯球函数, また G の離散部分群 Γ につい

て左不変な一種の保型固有函数である． $G\times G/G\cong G$ を考えれば，表現の指標なども固有函数として扱える．
昔からこのような観点から，対称空間上の種々の重要な固有函数が統一的にとらえられることは知られていたが，それについての組織的な研究はあまり見られないようである。対称空間上の固有函数がその境界上の超函数の Poisson 積分であらわせるという原理（あるいは定理，あるいは補題）を手掛りにして，このことを多少組織的に扱える可能性がある．

以下では H として G の特別な閉部分群をとり，G/H 上の帯球函数を定義し，それらの積分表示，函数等式などを証明する．

1. 準備

Gを中心有限の連結実半単純 Lie 群，Kをその極大コンパクト部分群とする． $\mathfrak{g}$をGの，$\mathfrak{k}$をKの Lie代数とする． θを$\mathfrak{g}$のCartan involutionとする． $\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{g};\ \theta X=-X\}$ の極大可換部分群を $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}^*$をその双対，$\mathfrak{a}_c^*$を $\mathfrak{a}^*$ の複素化とする． Σを $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の root 系とし，それに順序を入れて固定する． $\Psi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ をこの順序についての正の simple root の集合とする． $\mathfrak{g}^\alpha=\{X\in\mathfrak{g};\ [H,X]=\alpha(H)X \quad \forall H\in\mathfrak{a}\}$，$\dim\mathfrak{g}^\alpha=m_\alpha$とおく． さら

に $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} m_\alpha \alpha$ とする． $G=KAN$ を岩沢分解とする． $M=Z_K(A)$, $M^*=N_K(A)$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ を M, N のLie代数とする． $W=M^*/M$ を Weyl 群とする．

定義1： $\varepsilon : \Sigma \to \{-1, 1\}$ を次で定義する．

(i) $\varepsilon(\alpha_i)=\pm 1 \qquad \alpha_i \in \Psi$

(ii) $\varepsilon(\alpha)=\varepsilon(\alpha_1)^{m_1}\cdots\varepsilon(\alpha_l)^{m_l}$ if $\alpha=\sum m_i\alpha_i \in \Sigma$

定義2： 対合的自己同型 $\theta_\varepsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を次で定義する．

(i) $\theta_\varepsilon(X)=\varepsilon(\alpha)\,\theta(X)$ for $X\in\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha\in\Sigma)$

(ii) $\theta_\varepsilon(X)=\theta(X)$ for $X\in\mathfrak{m}+\mathfrak{a}$ //

以上のもとで $\mathfrak{k}_\varepsilon=\{X\in\mathfrak{g} ; \theta_\varepsilon X=X\}$ とし， K_ε^0 を $\mathfrak{k}_\varepsilon$ から生成される G の解析的部分群としたとき， $K_\varepsilon=MK_\varepsilon^0$ とおく． $M_\varepsilon^*=M^*\cap K_\varepsilon$, $W_\varepsilon=M_\varepsilon^*/M$ とし， $w_1=e, w_2, \cdots, w_r$ を $W_\varepsilon\backslash W$ の代表元とする $(r=[W:W_\varepsilon])$.

2. (K, K_ε) 不変帯球函数

$\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ を G/K_ε 上の不変微分作用素環とする．そして

$$\mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$$
$$=\left\{ u\in\mathcal{A}(G/K_\varepsilon) ;\ \begin{array}{l} u(kgK_\varepsilon)=u(gK_\varepsilon) \quad \text{for } k\in K, g\in G \\ Du=\chi_\lambda(D)\,u \quad \text{for } {}^\forall D\in\mathbb{D}(G/K_\varepsilon) \end{array}\right\}$$

とおく. ここで χ_λ は $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に対して自然に定義される $\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)$ から $\mathbb{C}$ への代数準同型とする.

定義3: $\mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon : \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の元を (K, K_ε) 不変帯球函数とよぶ. //

$$\varphi^i_{\lambda,\varepsilon}(g) = \int_K e^{(\lambda-\rho)H(gk)}\, e^{-(\lambda+\rho)H^i_\varepsilon(k)}\,dk$$

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}(g) = (\varphi^1_{\lambda,\varepsilon}(g), \cdots, \varphi^r_{\lambda,\varepsilon}(g))$$

とおく. この時, 次の補題が成立つ.

補題1: 1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda)) = r$

2) $\varphi^1_{\lambda,\varepsilon}(g), \cdots, \varphi^r_{\lambda,\varepsilon}(g)$ が $\mathcal{A}^K(G/K_\varepsilon ; \mathcal{M}(\chi_\lambda))$ のひとつの基底になる. //

この補題より

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}(g) = \varphi_{w\lambda,\varepsilon}(g)\, A_w(\lambda)$$

となるような $r\times r$ 行列 $A_w(\lambda)$ が存在することがわかる.
明らかに $A_w(\lambda)$ は次の性質を満足する.

$$A_{w_1 w_2}(\lambda) = A_{w_1}(w_2\lambda)\, A_{w_2}(\lambda) \quad (w_1, w_2 \in W)$$

この性質から, w が simple root に関する鏡映のときに $A_w(\lambda)$ を計算すればよいことがわかる.

$$\widetilde{A}_w(\lambda) = c_w(-\lambda)\, A_w(-\lambda)$$

とおく. ここで

$$c_w(\lambda) = \int_{\bar{N}\cap \bar{w}N_w} e^{-(\lambda+\rho)H(\bar{n}_w)}\, d\bar{n}_w$$

とおく．（ $d\bar{n}_w$ は $\bar{N} \cap \bar{w}^{-1} N w$ 上の不変測度）．$\tilde{A}_w(\lambda) = (\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda, w))$ とおくと

$$\tilde{\alpha}_{ij}(\lambda, w) = \int_{\bar{N} \cap \bar{w}^{-1} N w} e^{(\lambda - \rho) H_j^{\varepsilon}(w_i w \bar{n}_w)} d\bar{n}_w$$

が成立つ．$\bar{N}_\alpha = \bar{N} \cap w_\alpha^{-1} N w_\alpha$ （w_α は $\alpha \in \Sigma$ に関する鏡映）とおくと．一般に次の補題が成立つ．

<u>補題 2</u>： i) α は reduced root で $2\alpha \notin \Sigma$ のとき

$$\int_{\bar{N}_\alpha} e^{-(\lambda+\rho) H_\varepsilon^w (v \bar{n}_\alpha)} d\bar{n}_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } v^{-1} w \neq e, w_\alpha \\ C_\alpha(\lambda_\alpha) & \text{if } v = w \text{ or } w = v w_\alpha \ \varepsilon(v\alpha) = 1 \\ \dfrac{\sin \pi \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}}{\sin \pi \left(\frac{m_\alpha}{2} + \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)} C_\alpha(\lambda_\alpha) & \text{if } \varepsilon(v\alpha) = -1 \\ & \quad v = w \\ \dfrac{\sin \pi \frac{m_\alpha}{2}}{\sin \pi \left(\frac{m_\alpha}{2} + \frac{\langle \lambda, \rho \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)} C_\alpha(\lambda_\alpha) & \text{if } \varepsilon(v\alpha) = -1 \\ & \quad w = v w_\alpha \end{cases}$$

ii) α, $2\alpha \in \Sigma$ のとき

$$\int_{\bar{N}_\alpha} e^{-(\lambda+\rho) H_\varepsilon^w (v \bar{n}_\alpha)} d\bar{n}_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } v^{-1} w \neq e, w_\alpha \\ C_\alpha(\lambda_\alpha) & \text{if } \varepsilon(v\alpha) = 1. \ v = w \text{ or } w = v w_\alpha \\ \dfrac{\cos \pi \left(\frac{m_\alpha}{4} - \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{2\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)}{\cos \pi \left(\frac{m_\alpha}{4} + \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{2\langle \alpha, \alpha \rangle} \right)} C_\alpha(\lambda_\alpha) & \text{if } \varepsilon(v\alpha) = -1 \\ & \quad v = w \\ & \quad \text{or } w = v w_\alpha \end{cases}$$

ここで

$$C_\alpha(\lambda_\alpha) = \begin{cases} B\left(\frac{m_\alpha}{2}, \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right) & \text{if } m_{2\alpha} = 0 \\ B\left(\frac{m_\alpha}{2}, \frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \right) B\left(\frac{m_{2\alpha}}{2}, \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{2\langle \alpha, \alpha \rangle} + \frac{m_\alpha}{4} \right) & \text{if } m_{2\alpha} \neq 0 \end{cases}$$

命題3（函数等式）　$\varphi^1_{\lambda,\varepsilon}(g),\cdots,\varphi^r_{\lambda,\varepsilon}(g)$ は次の形の函数等式を満たす．

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon}(g)=\varphi_{w\lambda,\varepsilon}(g)A_w(\lambda)\qquad \forall w\in W.$$

そして　$A_{w_1w_2}(\lambda)=A_{w_1}(w_2\lambda)A_{w_2}(\lambda)$ が成立ち　$w\in W$ が root に関する鏡映のときは補題2の形の函数を行列成分にもつ．

3　$(K_{\varepsilon'},K_\varepsilon)$ 不変帯球函数

ε,ε' を 1. で定義したものとし $K_{\varepsilon'},K_\varepsilon$ を対応するGの部分群とする．

$$\varphi^{ij}_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon}(g)=\int_K e^{(\lambda-\rho)H^i_{\varepsilon'}(gk)}e^{-(\lambda+\rho)H^j_\varepsilon(k)}dk$$

$$i=1,\cdots,r',\quad j=1,\cdots,r$$

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon}(g)=(\varphi^{11}_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon}(g),\cdots,\varphi^{1r}_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon},\varphi^{21}_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon},\cdots,\varphi^{2r}_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon},\cdots,\varphi^{r'r}_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon}(g))$$

とおく．　2. で定義した $A_w(\lambda)$ を $A^\varepsilon_w(\lambda)$ などであらわしたとき　次が成立つ．

補題4：　$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ が　$2\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\notin\mathbb{Z}$　$(\forall\alpha\in\Sigma)$ をみたすとき　$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{B}^{K_{\varepsilon'}}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))=rr'$
$\mathcal{B}^{K_{\varepsilon'}}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の基底として $\{\varphi^{ij}_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon}(g)\}$ をとることができる．　ここで

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B}^{K_{\varepsilon'}}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))\\
&=\{u\in\mathcal{B}(G/K_\varepsilon);\ u(k_{\varepsilon'}gK_\varepsilon)=u(gK_\varepsilon)\ \text{for } k_{\varepsilon'}\in K_{\varepsilon'},\ g\in G\\
&\qquad\qquad Du=\chi_\lambda(D)u\quad\text{for } \forall D\in\mathbb{D}(G/K_\varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

とおいた.

<u>定義4</u>: $\mathcal{B}^{K_{\varepsilon'}}(G/K_\varepsilon;\mathcal{M}(\chi_\lambda))$ の元を $(K_{\varepsilon'},K_\varepsilon)$ 不変帯球函数と呼ぶ.

<u>命題5</u> (函数等式)

$$\varphi_{\lambda,\varepsilon',\varepsilon}(g)=\varphi_{w\lambda,\varepsilon',\varepsilon}(g)A_w^{\varepsilon}(\lambda)\otimes A_w^{\varepsilon'}(-\lambda)\quad(\forall w\in W)$$

4. 保型固有函数

Gが半単純線型群の場合, ΓをGのある種の離散部分群としたとき, G/K上の左Γ不変な固有函数であるEisenstein級数を定義することができる. さてIntroductionでも述べたように G/K_ε 上の同時固有函数は境界上の超函数のPoisson積分で表わせるという原理に従えば, Eisenstein級数からはじめて, 境界を超えて G/K_ε 上の左Γ不変な固有函数を定義できる. これらの保型固有超函数はEisensten級数と同様にある種の函数等式を満たすことがいえる. それは本質的に 2, 3. で求めた帯球函数の函数等式に帰着される. ところでこのような保型固有函数の意味は不明瞭である. (cf. [4]).

(K, K_ε)不変帯球函数は［1］で基本的な役割をはたしている．Plancherel の公式には $(K_\varepsilon, K_\varepsilon)$不変帯球函数が必要だろう．実際 $SO_0(n+1,1)/SO(n,1)$ の場合にはそれを使って Plancherel の公式を求めている論文もある．

Reference

［1］大島－関口：Harmonic analysis on affine symmetric spaces. 超函数と微分方程式（1976年10月）の講究録にのる予定

［2］————：Affine symmetric space における境界値問題．指標と不変固有超函数（1977年3月）の講究録にのる予定．

［3］————：Boundary value problem on symmetric homogeneous spaces, to appear in Proc. Japan Acad..

［4］佐藤文広：二次形式のゼータ函数と特殊函数，この講究録にのる予定．