

## $S^3$ -判定のアルゴリズム

東工大 情報科学科 落合豊行

### 第一章 Volodin のアルゴリズム (A) について.

この章において我々は [2] の紹介をする。[2] において主張されていることは次のことにある。

Assertion “任意に与えられた Heegaard 分解 (a net) が  $S^3$  を与えるための必要十分条件は、アルゴリズム (A) の Input として、その Heegaard 分解 (a net) を投入したとき、Output として Standard な  $S^3$  の Heegaard 分解 (a net) が得られることである”

<定義 1> 三次元閉多様体  $M^3$  の Heegaard 分解  $M^3 = H_1(n) \cup_{\alpha_n} H_2(n)$  とは、

(1)  $\alpha_n: V_n \rightarrow V_n$  ( $V_n$  は genus  $n$  のリーマン面) を  $V_n$  から  $V_n$  の上への微分同相とする。

(2)  $H_1(n), H_2(n)$  を三次元ユークリッド空間  $R^3$  に標準的に embed される genus  $n$  の Solid torus の二つの copy とす

る。  $\partial H_1(n) = \partial H_2(n) = V_n$

(3)  $M = H_1(n) \cup_{\partial n} H_2(n)$  は  $H_1(n)$  と  $H_2(n)$  の境界を微分同相  $\alpha_n$  で張り合わせた空間とする。

次に前に定義された Heegaard 分解に対応して morse function を定義し、Heegaard 分解の meridian 系を定める。我々はまず  $H_1(n), H_2(n)$  の上に morse function  $f_1(n), f_2(n)$  を定める。

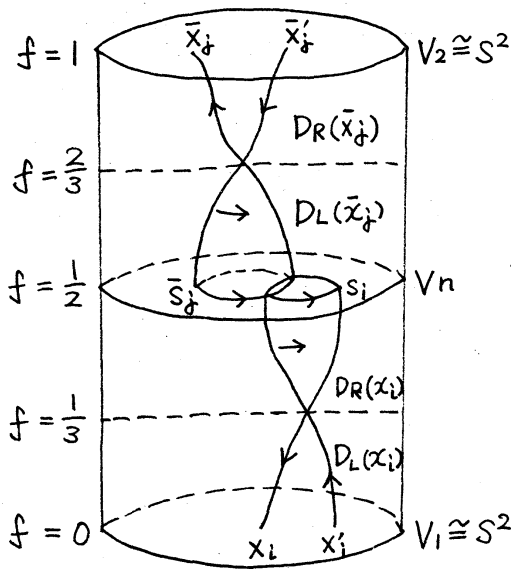
(1)  $f_1(n)$  は  $n$  個の index 1 の critical point と、1 個の index 0 の critical point をもつ。

(2)  $f_2(n)$  は  $n$  個の index 2 の critical point と、1 個の index 3 の critical point をもつ。

(3)  $f_1(n)|_{\partial H_1(n)} = \text{const} = f_2(n)|_{\partial H_2(n)}$

$H_1(n)$  と  $H_2(n)$  は微分同相  $\alpha_n$  で張り合わされているので、 $f_1(n), f_2(n)$  より (3) を利用して、 $M^3$  の morse function  $f(n)$  を定義できる。我々はここで、 $M^3 = H_1(n) \cup_{\alpha_n} H_2(n)$  から index 0 と index 3 の critical point を、それらを含む小さい 3-cell を除くことにより取り除く。そうすることによって、 $S^2$  の cobor dism  $(N, V_1, V_2)$  ( $V_i \cong S^2$   $i = 1, 2$ ) とそこにおける morse function  $f$  で、 $2n$  個の index 1 と index 2 critical points を持つものが作れる。

今、morse function  $f$  の index 1 の critical points を  $x_1, \dots, x_n$



index 2 の critical points  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  とする。

$D_L(x_i)$ ;  $x_i$  の left-hand disk

\*  $D_L(\bar{x}_j)$ ;  $\bar{x}_j$  の left-hand disk

\*  $D_R(x_i)$ ;  $x_i$  の right-hand disk

$D_R(\bar{x}_j)$ ;  $\bar{x}_j$  の right-hand disk

$S_R(x_i) = S_i$ ;  $x_i$  の right-hand disk の境界.

$S_L(\bar{x}_j) = \bar{S}_j$ ;  $\bar{x}_j$  の left-hand disk の境界.

$S_L(x_i) = x_i \cup x'_i$ ;  $x_i$  の left-hand sphere.

$S_R(\bar{x}_j) = \bar{x}_j \cup \bar{x}'_j$ ;  $\bar{x}_j$  の right-hand sphere.

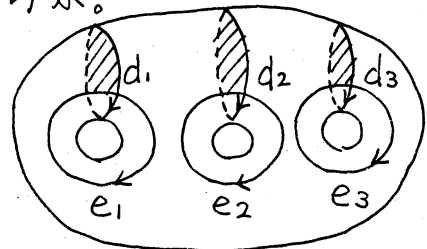
\* の disk の集合を Heegaard 分解の meridian 系と呼ぶ。

我々は Morse function  $f$  により与えられる  $V_n$  の上の図形  $S_i, \bar{S}_j$  を Heegaard 分解の net  $C(f)$  と呼ぶ。net  $C(f)$  は全て oriented であるとする。  $M^3$  は orientable であるので、この orientation を与えることは可能である。この orientation を持った net のことを oriented net と呼ぶ。

<定義 2>  $D_R(x_i) = d_i$

$\partial D_L(\bar{x}_j) = \bar{S}_j = e_j$  とし右図を

Standard net と呼ぶ。



Standard net は  $S^3$  (三次元球面) を与える。

<定義3> 三次元球面を与える net を spherical と呼ぶ。

次に1つの net  $(\beta)$  が  $V_n$  に与えられているものとする。  
そのとき  $(\beta)$  は  $V_n$  をいくつかの domain  $U_\beta$  の集合に分ける。

<定義4> domain  $U_i \in U_\beta$  は distinguished であるとは、

(1)  $U_i$  の境界上に  $\{S_i, \bar{S}_i\}$  の中の一つの circle に含まれる二つの辺  $a_1, a_2$  があり、しかも  $a_1, a_2$  の方向が  $U_i$  の周の方向と一致する ( $a_1, a_2$  のことを distinguished edge と呼ぶ)

<定義5> distinguished domain  $U_i$  において  $a_1$  の内点と  $a_2$  の内点を結ぶ線分を wave  $\tau$  と呼ぶ。

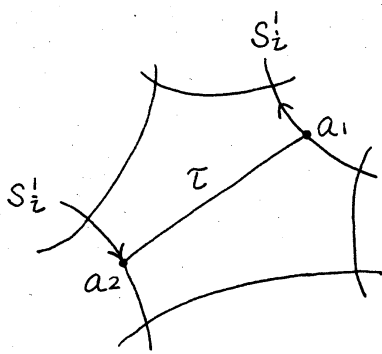
<定義6> “アルゴリズム (A)”

(1) entrance; oriented net  $(\beta_1)$  がアルゴリズム (A) の Input として投入される。

(2) Search for a wave; net  $(\beta_1)$  において distinguished domain  $U_i$  と edge  $a_1, a_2$  を探す。今、どんな distinguished domain も存在しないとき、アルゴリズム (A) の output は net  $(\beta_1)$  であり、Input, Output 共に同じ net である。

次に  $U_i$  があれば、 $a_1$  と  $a_2$  の間に wave  $\tau$  をとる。

(3) net の reduction;  $a_1, a_2$  は  $S_i^\pm$  中に含まれているものとする。そのとき、 $S_i^\pm$  は  $\tau$  の両端点によって二つの部分、



$\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ に分かれる。そのとき、 $\tilde{S}_2$ を $\tau$ におきかえることにより、 $S_i^1$ にかわる新しい circle  $S_i^1 = \tilde{S}_1 \cup \tau$  ができる。(  $S_i^1$ が index 1 なら  $H_1(n)$  で、index 2 なら  $H_2(n)$  にそれぞれ 2-disk がはれる

ことが示される) 従って  $S_i^1$  に残余の circle  $\{S_{i^1}, \bar{S}_{i^1}\} - S_i^1$  を加えて新しい net  $(B_2)$  を作れる。この新しい net  $(B_2)$  が真の net であり、しかも net  $(B_1)$  が与える多様体と同相な三次元多様体を与えることが示される。(Theorem 4.3.1 in [2])

(4) Passing to the next stage ; net  $(B_2)$  を  $(B_1)$  とし、

(1) にもどる。

この論文の始めにおいて述べられた主張、その十分性は Theorem 4.3.1 で証明されるが、その必要性については、まだ証明に成功していない。(  $n=2$  については必要性が最近、本間教授によって証明された) 但し [2] の著者達は  $n=2$  から  $n=32$  までの  $10^6$  個の spherical nets についてその必要性が成立つことを確かめている。この論文 [2] の後半においては、自由群  $F_n$  の word から作られる whitehead graph と  $P(n) \supset RP_1(n) \supset GL(n)$  (参照 [2] page 95) との関係が論ぜられているが、その解析にはまだ成功していない。また始めの Assertion と同値な Conjecture を whitehead graph の言語

を使つて与えている。

## 第二章 2-bridge knot の Dehn construction について。

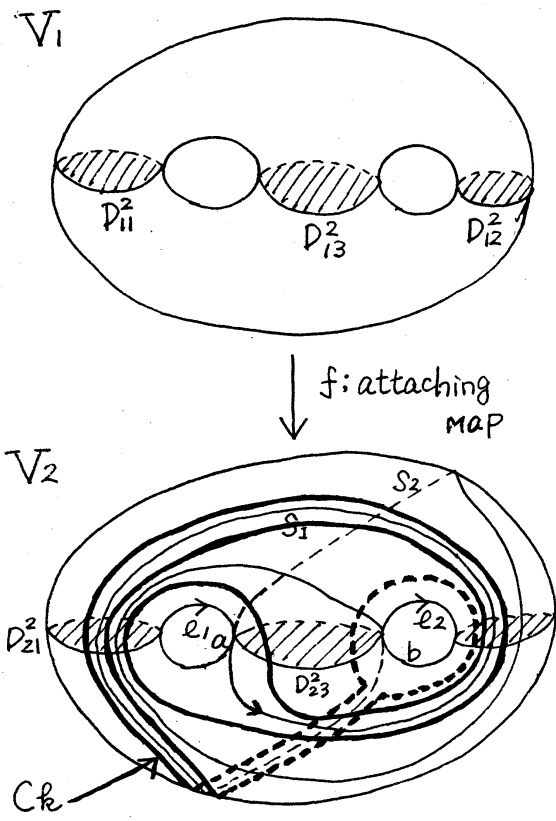
我々はこの章において、2-bridge knot から non-trivial Dehn construction によつて作られる manifold  $M^3$  が三次元球面でないことを示す。(  $\pi_1(M^3) \neq 0$  を示すのが Property P の問題であるが 2-bridge knot に対してはまだ解かれていない。参照 [1] )

実際に証明することは  $M^3$  が genus 2 の irreducible な Heegaard 分解を持つことを示すだけである。なぜなら最近本間教授によつて次のことが示された。“  $S^3$  の任意の genus 2 の Heegaard 分解は reducible である。”

今、  $S^3$  の  $K$  を三次元球面に含まれる、2-bridge knot,  $N(K, S^3)$  を  $S^3$  における  $K$  の regular neighborhood とする。そのとき  $S^3 - \dot{N}(K, S^3)$  と  $N(K, S^3)$  との attaching を適当に変えることによつて三次元閉多様体  $M^3$  を作ることができる。このような construction のことを Dehn construction という。特にその attaching がもとのと違うとき、non-trivial Dehn construction という。

<補題 I> 2-bridge knot から Dehn construction によつて作られる三次元閉多様体  $M^3$  は genus 2 の Heegaard 分解をもつ。  
証明、 [3] を参照。

補題1によつて  $M^3$  に induce される Heegaard 分解  $(M^3, V_1, V_2, F)$  は、その meridian の一つの attaching について次のような性質をもっている。今、 $D_{11}^2, D_{12}^2 \in V_1$  の meridian、 $D_{21}^2, D_{22}^2 \in V_2$  の meridian、 $l_1, l_2$  を  $D_{21}^2, D_{22}^2$  とそれぞれ一点で交わる  $V_2$  の longitude とする。始めに与えられた  $S^3$  の  $k$  2-bridge knot は



(図-1)

は  $V_2$  上にあり、 $l_1, l_2$  とそれぞれ一点で交わる。この交わる点をそれぞれ  $a, b$  とする。又  $a$  から  $b$  で終る  $k$  上の弧を  $S_1, S_2$  とする。このとき  $S_1 \cup S_2 = k$ ,  $S_1 \cap S_2 = a \cup b$  である。そのとき、 $S_1 l_1 S_1^{-1} l_1^{-1}$  に沿つて  $V_2$  上に simple closed curve がとれる。この curve のことを knotting curve  $C_k$  と呼ぶ (knotting curve は 2-bridge knot  $k$  の

knot 群の  $l_1, l_2$  を生成元とする relation を与えている。しかも、 $C_k$  を  $l_1, l_2$  で表現したとき、 $l_1, l_2$  共に 2 乗の項は表われないように knot  $k$  を  $V_2$  上にとれる。)

補題1の証明において明らか様様に、 $M^3$  の自然な genus 2

の Heegaard 分解は全てその meridian  $D_i^2$  を  $C_k$  に移している。

〈補題2〉  $\partial V_2$  上において  $C_k$  は  $l_1, l_2$  と共に  $\partial V_2$  を二つの穴をもった fake 2-disk と同相な二つの部分  $A_1, A_2$  に分割する。

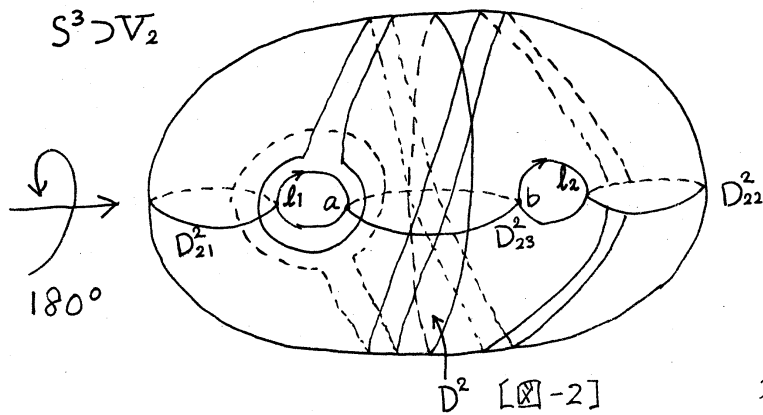
証明.  $\partial V_2 - (C_k \cup l_1 \cup l_2) = A_1' \cup A_2'$  とし、 $\bar{A}_1' = A_1, \bar{A}_2' = A_2$  とする。今、 $A_1' \cap S_1$  とすると  $A_1$  が二つの穴をもった fake 2-disk と同相であることは、 $C_k$  の作り方によって明白。すなわち、 $C_k$  は  $l_1$  と  $l_2$  を  $S_1$  に沿った band  $(I \times I)$  で結んだときできる領域  $A_1'$  の境界である。従って  $A_2$  は  $\partial A_2 = \partial A_1$  より  $\partial A_2$  は三つの  $S_1$  よりなる。ところが  $A_1 \cup A_2 = \partial V_2 = \text{genus } 2 \text{ orientable Surface}$  であるので  $A_2$  も又、二つの穴のあいた fake 2-disk である。」

次に  $D_{21}^2, D_{22}^2$  を図-1におけるような meridian-disk とする。

〈補題3〉  $C_k$  上で  $a, b$  より出発したとき  $D_{21}^2, D_{22}^2, D_{23}^2$  の内のどれかに最初に到達するとすれば、 $D_{21}^2, D_{22}^2$  の内のどちらかであって  $D_{23}^2$  ではない。

証明. curve  $C_k$  の  $\partial V_2$  上での  $D_{21}^2 \cup D_{22}^2 \cup D_{23}^2$  に関する対称性によって、 $C_k$  に沿って  $a$  に至るとき、 $D_{23}^2$  を  $a$  の直前に横切るならば、 $a$  から  $C_k$  に沿って進んだとき、始めて横切る meridian disk は  $D_{23}^2$  である。(この対称性は  $l_1$  を  $l_1$  に、 $l_2$  を  $l_2$  に移す)

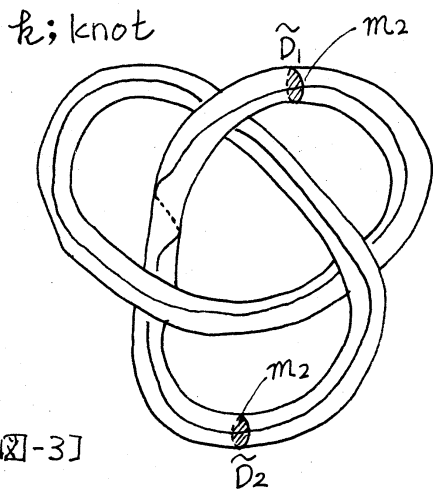




従って、 $V_2$ の proper disk  $D^2$  で  $V_2$  を二つに分ける disk に沿って片方を  $180^\circ$  と回転することによって、補題の成立するように

できる。この回転によって  $b$  に関しても自然に補題は成立してしまう。」

次に  $M^3$  の補題 1 によって induce される Heegaard 分解の meridian 系と knot  $k$  の  $S^3$  における regular neighborhood  $N(k, S^3)$  の meridian との関係を図述べる。すなわち  $S^3 - \overset{\circ}{N}(k, S^3)$  と



$V_2 \cup_{c \in k} D_{ii}^2 \times I$  が対応し、 $N(k, S^3)$  と  $V_1 - (D_{ii}^2 \times I)^\circ$  が対応する。

$N(k, S^3)$  の二つの disjoint な meridian を  $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$  とする。

又、 $m_1, m_2 \in \partial(S^3 - \overset{\circ}{N}(k, S^3))$  上の simple closed curve を  $\partial \tilde{D}_1, \partial \tilde{D}_2$  に対応するものとする。<sup>\*1</sup> このとき、

対応  $N(k, S^3) \leftrightarrow V_1 - (D_{ii}^2 \times I)^\circ$  において  $\tilde{D}_1$  に  $\tilde{D}_2^2$ ,  $\tilde{D}_2$  に  $\tilde{D}_3^2$  が対応する。 $\tilde{D}_i \in S^3 - \overset{\circ}{N}(k, S^3)$  の境界の longitudinal 方向に  $n$  回まわして、attach してできる mfd  $\in M^3$  とすると、<sup>\*2</sup>  $\partial \tilde{D}_i$  は  $m_1, m_2$

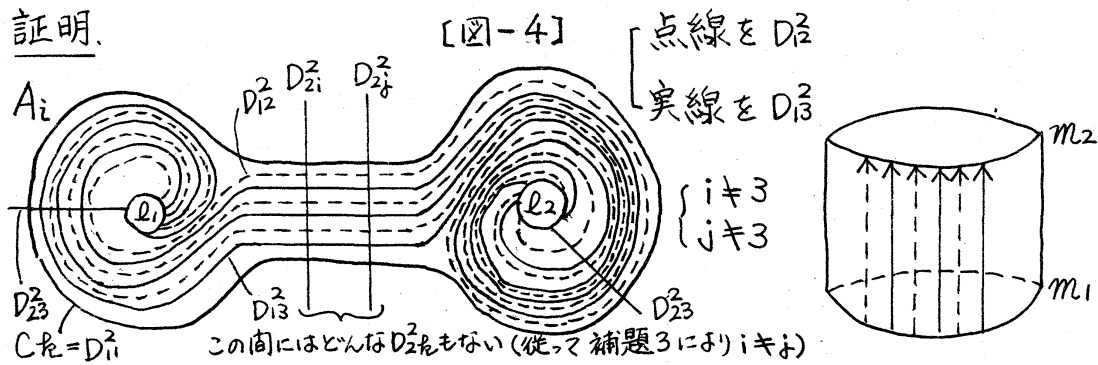
をそれぞれ同一方向から  $n$  回横切ることになる。従って  $M^3$  に補題 1 によつて induce される Heegaard 分解において、 $D_{12}^2$  は  $l_1, l_2$  をそれぞれ同一方向から  $n$  回横切る。同様に  $D_{13}^2$  も又、 $l_1, l_2$  を同一方向から横切ることになる。(  $D_{12}^2$  と同様に  $n$  回)

<補題 4>  $M^3$  に induce される Heegaard 分解は  $V_2$ -irreducible である。(すなわち  $F$  上に  $\partial D_{11}^2, \partial D_{12}^2, \partial D_{13}^2, \partial D_{21}^2, \partial D_{22}^2, \partial D_{23}^2$  によつて生成される領域のどれもがその周上に、 $\partial D_{21}^2$  (又は  $\partial D_{22}^2$  又は  $\partial D_{23}^2$ ) の部分によつて占められた二つの弧を持たない)

証明. 補題 2, 3 により明白。

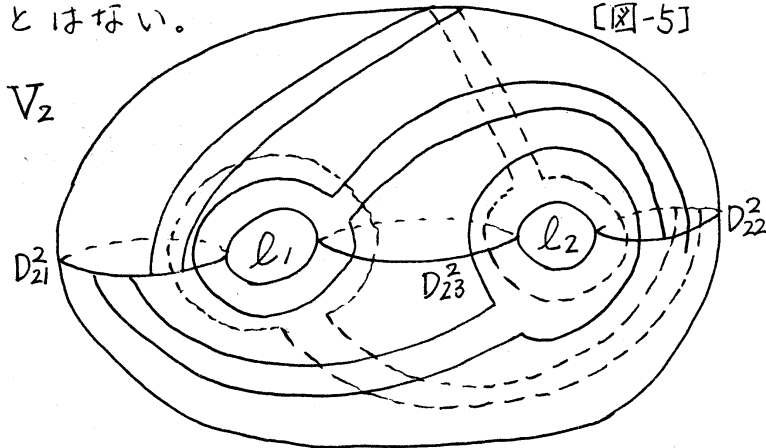
<補題 5>  $V_1$ -irreducible (上の定義において  $\partial D_{21}^2, \partial D_{22}^2, \partial D_{23}^2$  を  $\partial D_{11}^2, \partial D_{12}^2, \partial D_{13}^2$  に替えよ) である。

証明.



$A_1, A_2$  の band の部分と  $D_{21}^2, D_{22}^2, D_{23}^2$  とによつて  $\partial V_2$  上に生成される領域の irreducibility に関して、対応  $\tilde{D}_1 \leftrightarrow D_{12}^2, \tilde{D}_2 \leftrightarrow D_{13}^2$   $l_1 \leftrightarrow m_1, l_2 \leftrightarrow m_2$  により明白である。従つて問題となるのは図-5 の領域における  $V_1$ -irreducibility のみである。 $\tilde{D}_1$  と  $\tilde{D}_2$  が  $m_1, m_2$  を交互に同一方向から横切るのよ、 $D_{12}^2, D_{13}^2$  も又  $l_1, l_2$

を交互に同一方向から横切る。従って  $V_1$ -reducible と呼ぶこと  
 とはない。 [図-5]



\* 1 ; ここでの対応とは始めの trivial な対応を意味する。

\* 2 ; この attaching には当然  $m_1, m_2$  方向に何回か回わすこと  
 も考慮される。

注) 詳細については、他稿に譲る。

### 参考文献

1. R. RILEY 'Knots with the parabolic Property P', Quart.  
 J. Math (2) 25 (1974) 273-83
2. A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko  
 'The problem of discriminating Algorithmically the standard  
 three-dimensional sphere', Russian Math. Surveys 29:5  
 (1974), 71-172
3. 落合豊行 'genus 2 の homology 3-sphere', 京都大学  
 数理解析研究所. 講究録 (1976. 1月)